Презентация по теме «Исследование функций с применением производной» (11 класс)

Учительство – не труд, а отреченье,
Умение всего себя отдать,
Уйти на долгий подвиг и мученье,
И в этом видеть свет и благодать.
Учительство – когда в глазах холодных
Зажжется понимания заря,
И ты поймешь: старался не бесплодно
И знания разбрасывал не зря.

Автор: Екимова Г.П., учитель математики

Исследование функций с применением производной

1. Исследование функции на **экстремумы**;
2. Исследование функции на **возрастание/ убывание**;
3. Исследование функции на **наибольшие и наименьшие** значения на отрезке;
4. Исследование **функции с помощью графика ее производной** (чтение графика производной)

Исследование функции на возрастание (убывание)

f(x) дифференцируема на интервале (a;b)

Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала, то функция $y=f(x)$ возрастает на этом интервале.

$$f'(x) > 0, x \in (a;b) \Rightarrow f(x) \text{ возрастает на } (a;b)$$

Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала, то функция $y=f(x)$ убывает на этом интервале.

$$f'(x) < 0, x \in (a;b) \Rightarrow f(x) \text{ убывает на } (a;b)$$

Исследование функции на **экстремумы**

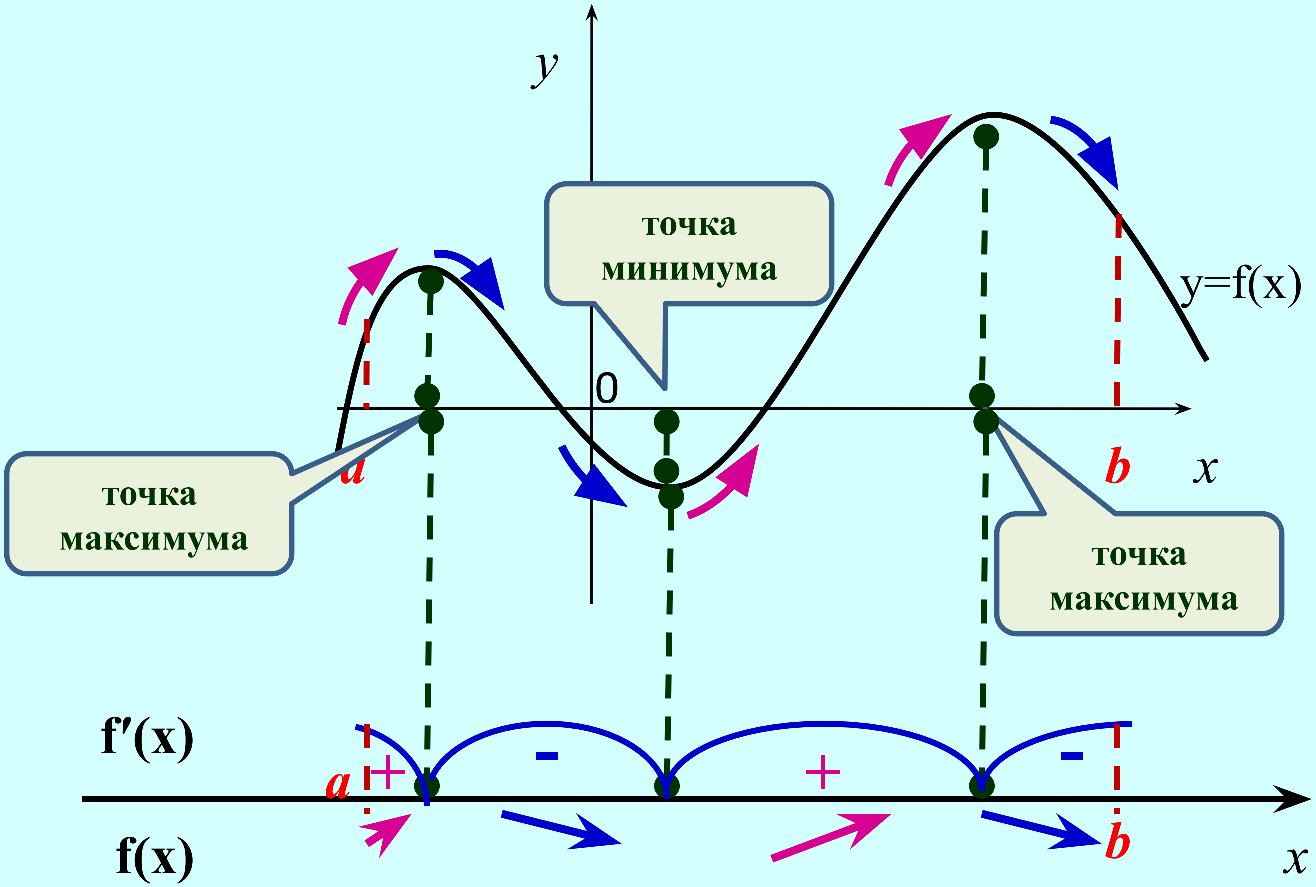
Признак максимума. Если функция f(x) – непрерывна в точке x_0

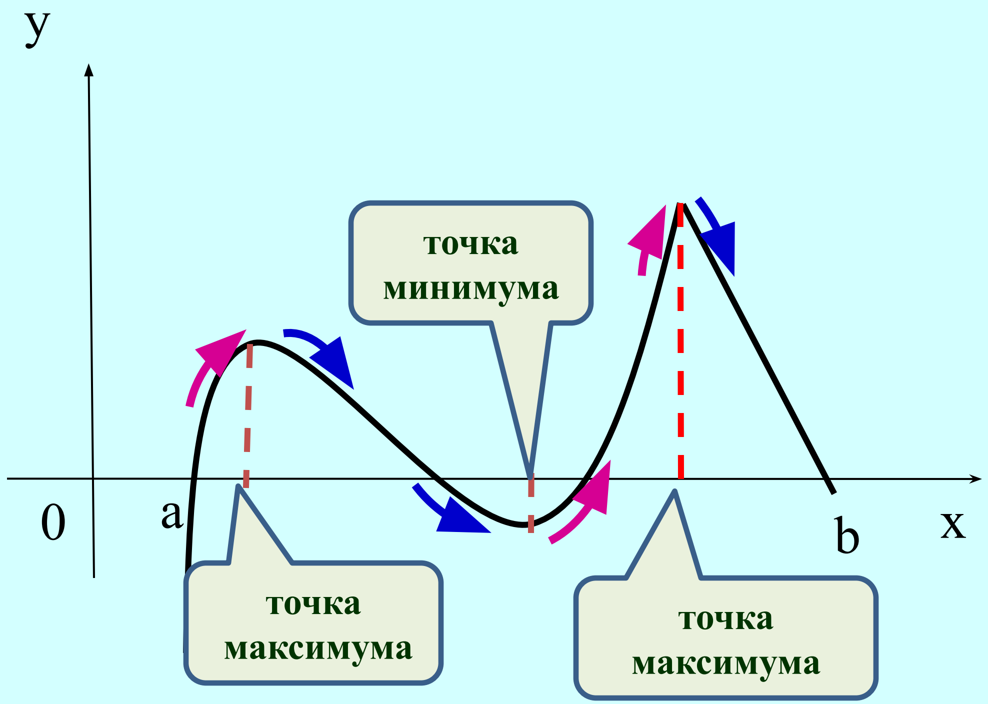
$$\left.\begin{aligned} f'(x) > 0,\ x \in (a; x_0) \\ f'(x) < 0,\ x \in (x_0; b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 \quad \textit{точка максимума}$$

Признак минимума. Если функция f(x) – непрерывна в точке x_0

$$\left.\begin{aligned} f'(x) < 0,\ x \in (a; x_0) \\ f'(x) > 0,\ x \in (x_0; b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 \quad \text{точка минимума}$$

Графическая интерпретация

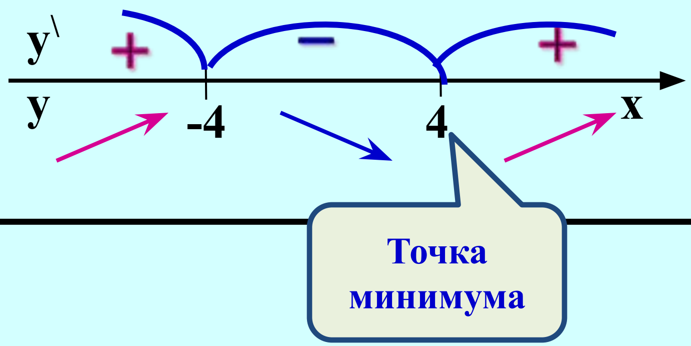



y
0
a
b
x
точка минимума
точка максимума
точка максимума

1. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 48x + 17$

Найти область определения функции: D(y)=(-∞;+∞)

Алгоритм	
1. Найти $f'(x)$	**1)** $y' = 3x^2 - 48$
2. Найти стационарные ($f'(x)=0$) и критические точки ($f'(x)$ *не существует*)	**2)** $y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x-4)(x+4)$ $3(x-4)(x+4)=0$ $x = 4,\ x = -4$
3. Определить знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.	



Ответ: 4

Реши самостоятельно!

2. Найдите точку максимума функции $y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3$

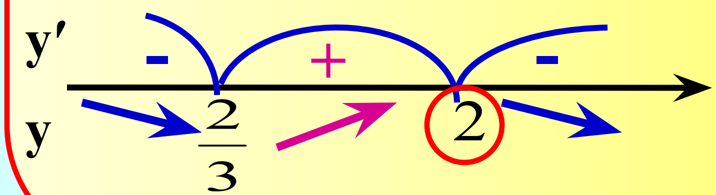
Проверь себя: D(y)=(-∞;+∞)

$$y' = -4 + 8x - 3x^2$$

$$-4 + 8x - 3x^2 = 0$$

$$D = 16$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$$



Ответ: 2

Реши самостоятельно!

3. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$

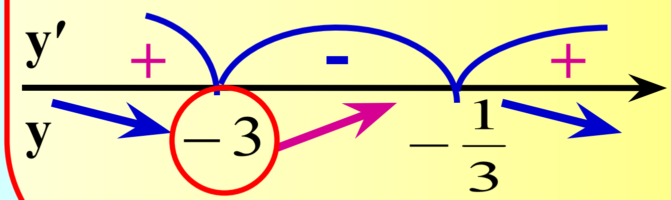
Проверь себя: D(y)=(-∞;+∞)

$$y' = 3x^2 + 10x + 3$$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$D = 64$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -3$$



Ответ: *-3*

4. Найдите точку минимума функции

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+1$$

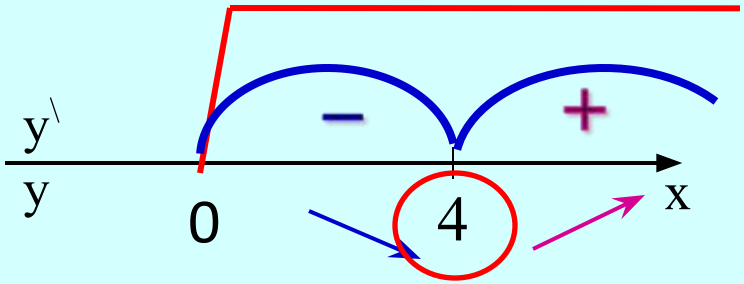
$$D(y): x \geq 0$$

$$y' = x^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{x} - 2$$

$$\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$



Ответ: 4

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 2x^3 + 1$$ на отрезке [-4;0]

Алгоритм	
1. Найти f ′ (x)	
2. Найти стационарные (**f′(x)=0**) и критические точки (**f′(x) не существует**) лежащие внутри отрезка [a;b]	
3. Вычислить **значение функции** на концах отрезка и в отобранных точках (см. п.2)	
4. Выбрать наименьшее значение (y_{min})	

Критических точек нет

Ответ: 1

Реши самостоятельно!

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x^2 - 4x - x^3$ на отрезке [1;3]

Проверь себя:

$$y' = 8x - 3x^2 - 4$$

$$-3x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$D = 16$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$$

y(1)=-1

y(3)=-3

y(2)=$\boxed{0}$

Ответ: *0*

Реши самостоятельно!

3. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-3)(x+3)^2$ на отрезке [-2;2]

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Проверь себя:

$$y' = (x+3)^2 + 2(x+3)(x-3)$$

$$(x+3)(x+3+2x-6) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ 3x-3=0 \end{array}\right.$$

$$x_1 = -3,\ x_2 = 1$$

y(-2)=-5

y(2)=-25

y(1)=$\boxed{-32}$

Ответ: *-32*

Реши самостоятельно!

4. Найдите наибольшее значение функции $y=(x-10)(x^2-11x+10)$ на отрезке [-1;7]

Проверь себя:

$$y'=\left(x^2-11x+10\right)+(x-10)\left(2x-11\right)$$

$$3x^2-42x+120=0$$

$$x^2-14x+40=0$$

$$x_1=4,\ x_2=10$$

y(-1)=-242

y(7)=54

y(4)=$\boxed{108}$

Ответ: *108*

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^2+16}{x}$$ на отрезке [2;8]

$$D(y): x \neq 0$$

$$y=x+16\cdot\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{x^2}{x}+\frac{16}{x}$$

$$y=x+16\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=1+16\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{16}{x^2}=\frac{x^2-16}{x^2}$$

$$\frac{x^2-16}{x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-16=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

Стационарные точки x=-4;4

Критическая точка x=0

$$-4\notin[2;8]$$

$$0\notin[2;8]$$

$$4\in[2;8]$$

$$y(2)=10 \quad y(8)=10 \quad y(4)=8$$

Ответ: 8

Реши самостоятельно!

6. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 7x + 49}{x}$ на отрезке [-14;-1]

Проверь себя: $y = \frac{x^2}{x} + \frac{7x}{x} + 49 \cdot \frac{1}{x}$

$$y = x + 7 + 49 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 + 0 + 49 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y' = 1 + 49 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{x^2 - 49}{x^2} = 0$$

x=-7, x=7, x≠0

y(-14)=-10,5
y(-1)=-43
y(-7)=$\boxed{-7}$

Ответ: -7

Реши самостоятельно!

7. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{250 + 50x - x^3}{x}$

на отрезке [-10;-1]

Проверь себя: $y = -\dfrac{x^3}{x} + \dfrac{50x}{x} + 250 \cdot \dfrac{1}{x}$

$$y = -x^2 + 50 + 250 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = -2x + 0 + 250 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y' = -2x + 250 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{-2x^3 - 250}{x^2} = 0$$

$$-2x^3 = 250$$

$$x^3 = -125$$

$$x = -5, x \neq 0$$

y(-10)=-75

y(-1)=-201

y(-5)=$\boxed{-25}$

Ответ: *-25*