

**Презентация по теме «Исследование функций с применением производной» (11 класс)**

***Учительство - не труд, а отречение,  
Умение всего себя отдать,  
Уйти на долгий подвиг и мученье,  
И в этом видеть свет и благодать.***

***Учительство - когда в глазах  
холодных***

***Зажжется понимания заря,  
И ты поймешь: старался не  
бесплодно***

***И знания разбрасывал не зря.***  
Автор: Екимова Г.П., учитель математики

# **Исследование функций с применением производной**

1. Исследование функции на экстремумы;
2. Исследование функции на **возрастание/ убывание**;
3. Исследование функции на **наибольшие и наименьшие значения** на отрезке;
4. Исследование **функции с помощью графика ее производной** (чтение графика производной)

## Исследование функции на возрастание (убывание)

*$f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a;b)$*

Если  $f'(x) > 0$  в каждой точке интервала, то функция  $y=f(x)$  возрастает на этом интервале.

$$f'(x) > 0, x \in (a;b) \Rightarrow f(x) \text{ возрастает на } (a;b)$$

Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала, то функция  $y=f(x)$  убывает на этом интервале.

$$f'(x) < 0, x \in (a;b) \Rightarrow f(x) \text{ убывает на } (a;b)$$

## Исследование функции на экстремумы

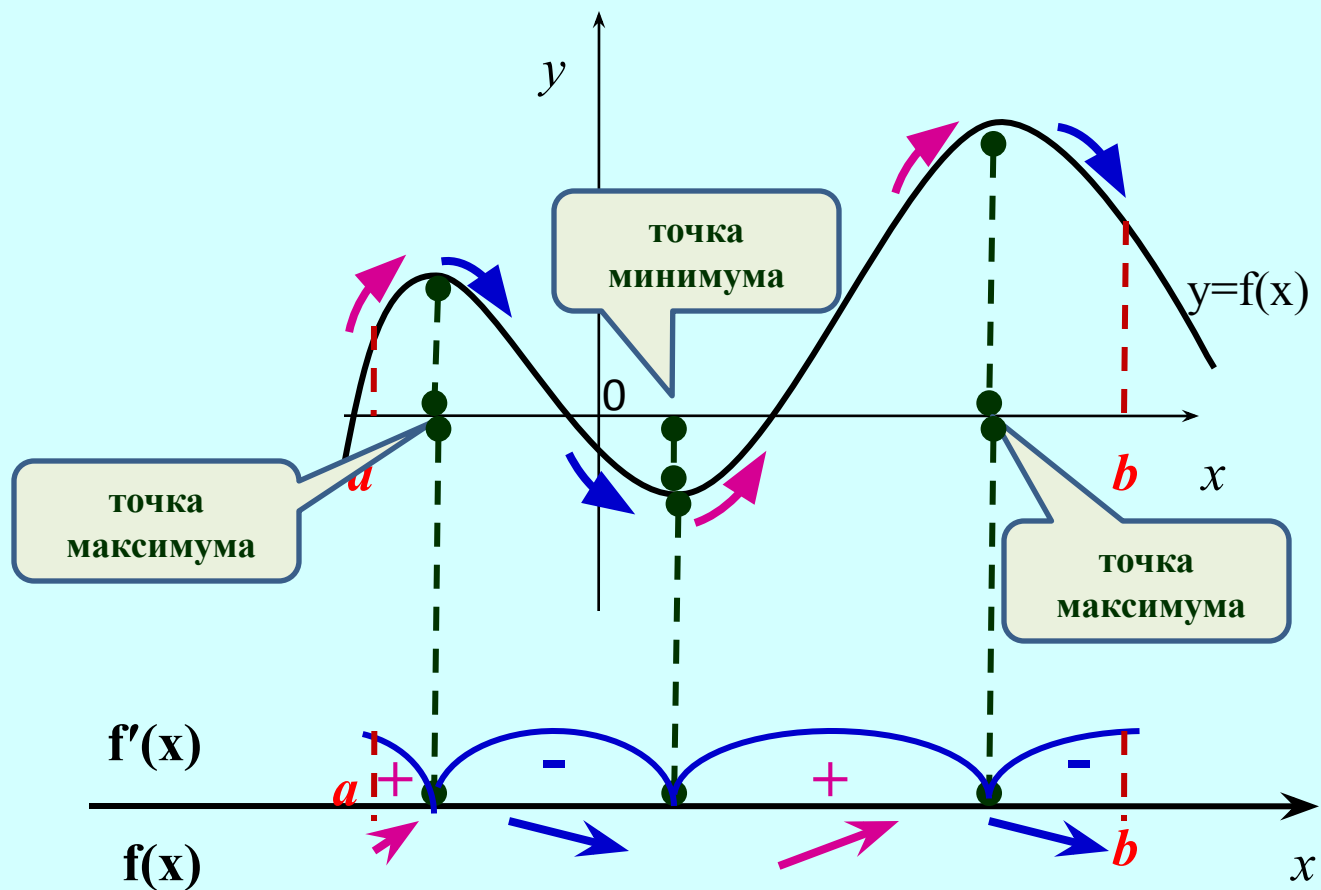
**Признак максимума.** Если функция  $f(x)$  – непрерывна в точке  $x_0$

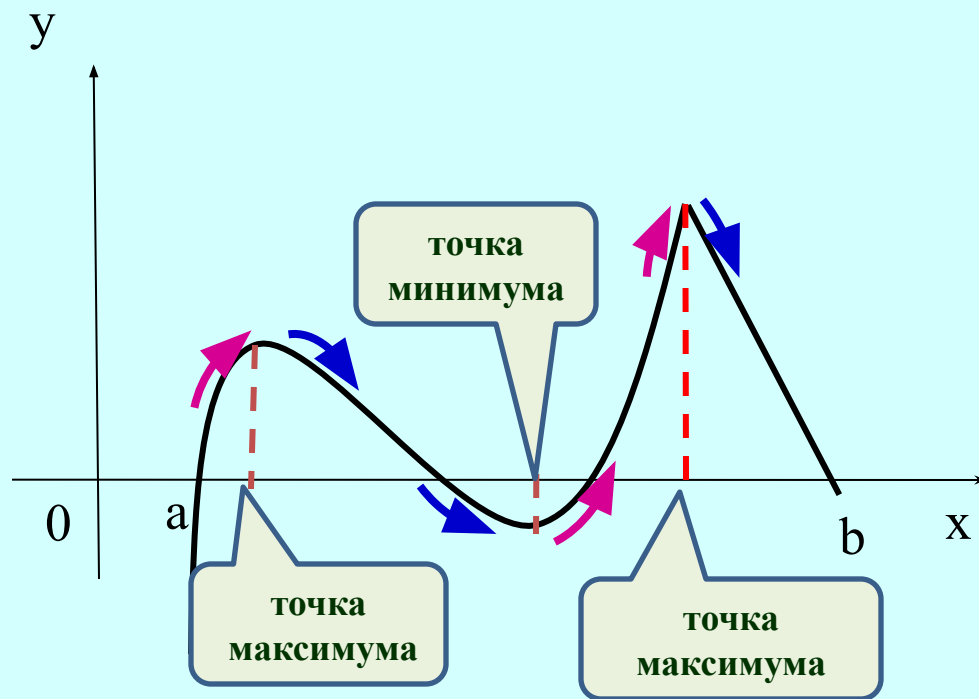
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x) < 0, x \in (x_0; b) \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ точка максимума}$$

**Признак минимума.** Если функция  $f(x)$  – непрерывна в точке  $x_0$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x) > 0, x \in (x_0; b) \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ точка минимума}$$

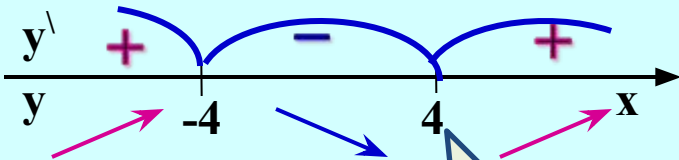
# Графическая интерпретация





1. Найдите точку минимума функции  $y = x^3 - 48x + 17$

Найти область определения функции:  $D(y) = (-\infty; +\infty)$

Алгоритм	
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 48$
2. Найти стационарные ( $f'(x)=0$ ) и критические точки ( $f'(x)$ не существует)	2) $y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4)$ $3(x - 4)(x + 4) = 0$ $x = 4, x = -4$
3. Определить знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.	 <p>The sign chart shows the derivative <math>y'</math> on the vertical axis and <math>x</math> on the horizontal axis. The horizontal axis has tick marks at <math>-4</math> and <math>4</math>. Above the axis, blue arcs indicate the sign of <math>y'</math>: a '+' sign above <math>x &lt; -4</math>, a '-' sign above <math>-4 &lt; x &lt; 4</math>, and a '+' sign above <math>x &gt; 4</math>. Pink arrows point from the labels <math>y'</math> and <math>x</math> to their respective axes. A callout box with a blue border and a pointer to <math>x = 4</math> contains the text 'Точка минимума'.</p>

**Ответ:**

4

**Реши самостоятельно!**

2. Найдите точку максимума  
функции  $y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3$



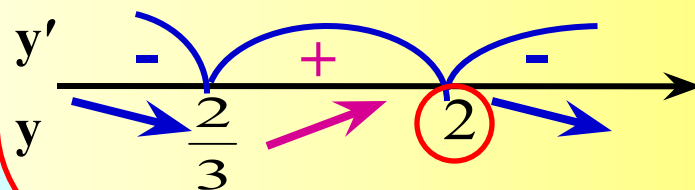
**Проверь себя:  $D(y) = (-\infty; +\infty)$**

$$y' = -4 + 8x - 3x^2$$

$$-4 + 8x - 3x^2 = 0$$

$$D = 16$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$$



**Ответ:**

**2**



**Реши самостоятельно!**

3. Найдите точку максимума  
функции  $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$



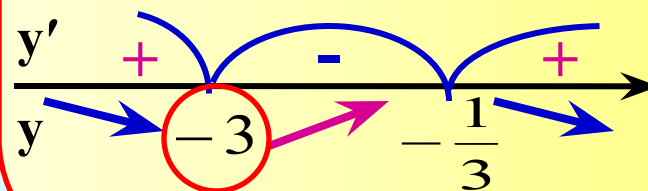
**Проверь себя:  $D(y) = (-\infty; +\infty)$**

$$y' = 3x^2 + 10x + 3$$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$D = 64$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -3$$



**Ответ:**

**-3**

4. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$$

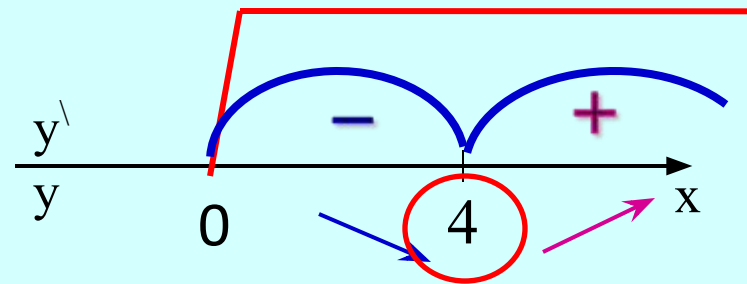
$$D(y) : x \geq 0$$

$$y' = x^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{x} - 2$$

$$\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$



**Ответ:**

4

1. Найдите наименьшее значение функции  
 $y = 3x^2 - 2x^3 + 1$  на отрезке  $[-4;0]$

Алгоритм	
1. Найти $f'(x)$	<div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 150px; height: 40px; margin: 5px;"></div>
2. Найти стационарные ( $f'(x)=0$ ) и критические точки ( $f'(x)$ не существует) лежащие внутри отрезка $[a;b]$	<div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 150px; height: 40px; margin: 5px;"></div> <div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 150px; height: 40px; margin: 5px;"></div> <div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 150px; height: 40px; margin: 5px;"></div> <div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 500px; height: 100px; margin: 5px;"></div>
3. Вычислить значение функции на концах отрезка и в отобранных точках (см. п.2)	<div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 350px; height: 40px; margin: 5px;"></div> <div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 250px; height: 40px; margin: 5px;"></div>
4. Выбрать наименьшее значение ( $y_{\min}$ )	<div style="border: 1px solid gray; background-color: #e0e0e0; width: 150px; height: 40px; margin: 5px;"></div>

Критических точек нет

Ответ:

**Решите самостоятельно!**

2. Найдите наибольшее значение функции  $y = 4x^2 - 4x - x^3$  на отрезке  $[1;3]$



**Проверь себя:**

$$y' = 8x - 3x^2 - 4$$

$$-3x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$D = 16$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$$

$$y(1) = -1$$

$$y(3) = -3$$

$$y(2) = 0$$

**Ответ:**

**0**

**Реши самостоятельно!**

3. Найдите наименьшее значение функции  $y = (x - 3)(x + 3)^2$  на отрезке  $[-2; 2]$

$$(uv)' = u'v + uv'$$



**Проверь себя:**

$$y' = (x + 3)^2 + 2(x + 3)(x - 3)$$

$$(x + 3)(x + 3 + 2x - 6) = 0$$

$$\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 3x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -3, x_2 = 1$$

$$y(-2) = -5$$

$$y(2) = -25$$

$$y(1) = -32$$

**Ответ:**

**-32**

## Реши самостоятельно!

4. Найдите наибольшее значение функции  $y = (x - 10)(x^2 - 11x + 10)$  на отрезке  $[-1; 7]$



**Проверь себя:**

$$y' = (x^2 - 11x + 10)' + (x - 10)(2x - 11)$$

$$3x^2 - 42x + 120 = 0$$

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = 10$$

$$y(-1) = -242$$

$$y(7) = 54$$

$$y(4) = 108$$

**Ответ:**

**108**

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 16}{x} \quad \text{на отрезке } [2; 8]$$

$$D(y) : x \neq 0$$

$$y = x + 16 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{16}{x}$$

$$y = x + 16 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 + 16 \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Стационарные точки  
 $x = -4; 4$

Критическая точка  
 $x = 0$

$$-4 \notin [2; 8]$$

$$0 \notin [2; 8]$$

$$4 \in [2; 8]$$

$$y(2) = 10 \quad y(8) = 10 \quad y(4) = 8$$

**Ответ:**

## Реши самостоятельно!

6. Найдите наибольшее значение

функции  $y = \frac{x^2 + 7x + 49}{x}$

на отрезке  $[-14; -1]$



**Проверь себя:**  $y = \frac{x^2}{x} + \frac{7x}{x} + 49 \cdot \frac{1}{x}$

$$y = x + 7 + 49 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 + 0 + 49 \cdot \left( -\frac{x}{x^2} \right)$$

$$y' = 1 + 49 \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)$$

$$\frac{x^2 - 49}{x^2} = 0$$

$$x = -7, x = 7, x \neq 0$$

$$y(-14) = -10,5$$

$$y(-1) = -43$$

$$y(-7) = -7$$

**Ответ:**

**-7**



## Реши самостоятельно!

7. Найдите наибольшее значение

$$\text{функции } y = \frac{250 + 50x - x^3}{x}$$

на отрезке  $[-10; -1]$



**Проверь себя:**  $y = -\frac{x^3}{x} + \frac{50x}{x} + 250 \cdot \frac{1}{x}$

$$y = -x^2 + 50 + 250 \cdot \frac{1}{x} \quad -2x^3 = 250$$

$$y' = -2x + 0 + 250 \cdot \left( -\frac{x^1}{x^2} \right) \quad x^3 = -125$$

$$y' = -2x + 250 \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \quad x = -5, x \neq 0$$

$$\frac{-2x^3 - 250}{x^2} = 0$$

$$y(-10) = -75$$

$$y(-1) = -201$$

$$y(-5) = -25$$

**Ответ:**

**-25**