Арифметический корень n-ой степени

Свойства корня.

Решение иррациональных уравнений и неравенств.

Арифметическим корнем n-ой **степени из числа а называется** ***неотрицательное число*****,**

n-я степень которого равна а**.**

$$\sqrt[n]{a} = x$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^n = a. \end{cases}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{если } a \geq 0$$

$$\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}, \text{если}$$

m - нечетное

$$x^n = a$$

n - четное

$$a \geq 0$$

Два корня

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt[n]{a}, \\ x_2 = -\sqrt[n]{a}. \end{array}\right.$$

n- нечетное

$$a - \text{любое}$$

Один корень

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Свойства арифметического корня n-ой степени

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполняются равенства:

$$1.\ \sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$2.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},(b\neq 0)$$

$$3.\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a},(k>0)$$

$$4.\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k},(k>0)$$

$$5.\ \sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k,(\text{если } k\leq 0,\text{ то } a\neq 0)$$

6. *Для любых чисел a и b, таких что $0 \le a < b$ выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

1. Вычислить:

$$1)\sqrt{7\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$2)\sqrt[3]{0,343} = 0,7$$

$$343 = 7^3$$

$$3)\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$$

$$4)\sqrt[10]{32^2} = \sqrt[5]{32} = 2$$

2. Сравнить числа

$$1)\sqrt[3]{5} \text{ и } \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$27 > 25 \qquad \sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$$

3. Расположить числа в порядке возрастания:

$$\sqrt[5]{4}, \sqrt[6]{3\cdot\sqrt[5]{3}}, \sqrt[10]{25}$$

$$\sqrt[6]{3\cdot\sqrt[5]{3}} = \sqrt[6]{\sqrt[5]{3^5\cdot 3}} = \sqrt[30]{3^6} = \sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[10]{25} = \sqrt[10]{5^2} = \sqrt[5]{5}$$

$$3 < 4 < 5 \quad \sqrt[5]{3} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[5]{5}$$

$$\sqrt[6]{3\cdot\sqrt[5]{3}}; \sqrt[5]{4}; \sqrt[10]{25}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \textit{если } n - \textit{нечетное} \\ |a|, \textit{если } n - \textit{четное} \end{cases}$$

4. Вынести множитель из под знака корня:

$$1)\sqrt[4]{32a^6y^4}, a \le 0, y \ge 0$$

$$\sqrt[4]{32a^6y^4} = \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{a^6} \cdot \sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} \cdot \sqrt{|a^3|} \cdot |y| =$$

$$= 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{-a^3} \cdot y = 2y\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{-a^3}$$

$$2)\sqrt[3]{0,25}\cdot\left(\sqrt[3]{4}+2\cdot\sqrt[3]{32}-4\sqrt[3]{108}\right)=$$

$$\sqrt[3]{0,25}\cdot\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{0,25}\cdot\sqrt[3]{32}-4\sqrt[3]{0,25}\cdot\sqrt[3]{108}=$$

$$=\sqrt[3]{1}+2\sqrt[3]{8}-4\sqrt[3]{27}=1+4-12=-7$$

$$3)\ \frac{\sqrt{28}\cdot\sqrt{45}}{\sqrt{35}}=\frac{\sqrt{4\cdot 7}\cdot\sqrt{9\cdot 5}}{\sqrt{5\cdot 7}}=\frac{2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=6$$

$$4)\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(4-2\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt[4]{16-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt[4]{24-16\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[4]{4\cdot\left(6-4\sqrt{2}\right)}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}=$$

$$\sqrt[4]{4\cdot\left(6-4\sqrt{2}\right)}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[4]{4\cdot\left(6-4\sqrt{2}\right)\cdot\left(6+4\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{4\cdot\left(36-32\right)}=\sqrt[4]{16}=2$$

$$5)\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=$$

$$\textit{Сравним } 2 \textit{ и } \sqrt{3}.$$

$$2=\sqrt{4};$$

$$4>3, \sqrt{4}>\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}<2$$

Второй множитель в данном выражении не представлен *арифметическим корнем* третьей степени.

$$5)\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\cdot\left(-\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)=$$

$$=-\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$-\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4-2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=-\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}=-\sqrt[6]{\left(7+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)}=$$

$$=-\sqrt[6]{49-48}=-\sqrt[6]{1}=-1$$

5. Внести множитель под знак корня

$$1) a\sqrt[4]{a}$$

$$2) a\sqrt{2}$$

$$3) -2\sqrt{a}$$

Решение иррациональных уравнений

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестные под знаком корня.

$$\sqrt{x} = 5$$

$$\sqrt[3]{x^2 + 4x - 20} = -3$$

$$\frac{2}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x+6}}{x+4}$$

$$\sqrt[4]{x+1} + 20 = \sqrt{x+1}$$

Решение уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

1 способ: ***возвести обе части уравнения в квадрат, но затем необходимо выполнить проверку полученных значений.***

2 способ: ***применение определения арифметического квадратного корня.***

$$\sqrt{a} = t,$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 = a. \end{cases}$$

Решить уравнения:

$$1)\sqrt{15-3x}=x+1$$

1 способ:

$$\left(\sqrt{15-3x}\right)^2=(x+1)^2$$

$$15-3x=x^2+2x+1$$

$$x^2+5x-14=0$$

$$x_1=-7, x_2=2$$

Проверка:

$$\text{если } x=-7, \text{ то } \sqrt{15-3\cdot(-7)}=-7+1, \sqrt{36}=-6$$

$$\text{неверное равенство}, x=-7-\text{посторонний корень}$$

$$\text{åñëè õ} = 2, \text{òî} \quad \sqrt{15-3\cdot 2}=2+1, \sqrt{9}=3 \quad x=2-\text{корень уравнения}$$

Ответ: 2

$$\sqrt{15-3x}=x+1$$

2 способ:

$$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ (x+1)^2=15-3x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge -1, \\ x^2+2x+1=15-3x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge -1, \\ x^2+5x-14=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge -1, \\ \left[\begin{array}{l} x=-7, \\ x=2, \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: 2

$$2)\left(x+2\right)\sqrt{23x-14-3x^2}=0$$

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом имеют смысл.

$$\begin{cases} 23x-14-3x^2\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ 23x-14-3x^2=0, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23x-14-3x^2\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=7, \\ x=\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \end{cases}$$

Проверка:

$$3)\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}-2=0$$

$$\sqrt[4]{(x+1)^2}-\sqrt[4]{x+1}-2=0$$

Замена: $\sqrt[4]{x+1}=t$ $\quad t^2-t-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=2. \end{array}\right.$$

$\sqrt[4]{x+1}=-1$ **- Нет корней**

$\sqrt[4]{x+1}=2,\ \begin{cases} 2\geq 0, \\ 2^2=x+1, \end{cases}$ $\quad x=3$

Ответ: 3

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=10, \\ \sqrt{y+1}\cdot\sqrt{x-1}=16. \end{cases}$$

Замена: $\sqrt{x-1}=a, \sqrt{y+1}=b$

$$\begin{cases} a+b=10, \\ a\cdot b=16, \end{cases} \qquad \begin{cases} a=10-b, \\ (10-b)\cdot b=16, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=2 \\ b_1=8, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2=8, \\ b_2=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ b_1 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2, \\ \sqrt{y+1} = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 = 4, \\ y+1 = 64, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 63. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 8, \\ b_2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x-1} = 8, \\ \sqrt{y+1} = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 65, \\ y = 15. \end{cases}$$

Ответ: $(5;63),(65;15)$

Решение уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

1 способ: ***возвести обе части уравнения в квадрат, но затем необходимо выполнить проверку полученных значений.***

2 способ: **применение определения арифметического квадратного корня.**

$$\sqrt{a} = t,$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 = a. \end{cases}$$

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{3x+1} = x-1$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ (x-1)^2 = 3x+1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 2x + 1 = 3x + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 5x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 5, \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: 5

2. Решить уравнение:

$$2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$$

Замена: $\sqrt[4]{x} = t$ $\quad 2t^2 - t = 1,$

$$2t^2 - t - 1 = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1, \\ \sqrt{x} = -\dfrac{1}{2}, \textit{нет решений.} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \sqrt{x} = 1 \\ x = 1 \end{array}$$

Ответ: 1

3. Решить уравнение:

$$(x+1)\cdot\sqrt{5x^2+22x-15}=0$$

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом имеют смысл.

$$\begin{cases} 5x^2+22x-15\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ \sqrt{5x^2+22x-15}=0, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2+22x-15\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-5, \\ x=\dfrac{3}{5}, \end{array}\right. \end{cases}$$

Проверка: $x=-1,$ *ïîñòîðîííè é êîðåíü*

Ответ: -5; 0,6

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = 3, \end{cases}$$

Замена: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 - b^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 + b, \\ (1 + b)^2 - b^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 + b, \\ b = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ \sqrt{y} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (4;1)

Степень с рациональным показателем

Если n – натуральное число, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \quad a^1 = a$$

Если n – целое число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1, (a \neq 0)$$

Свойства степени:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Свойства степени:

$$Если\ a > 1\ и\ m > n,\ то\quad a^m > a^n$$

$$Если\ 0 < a < 1\ и\ m > n,\ то\quad a^m < a^n$$

Если n – дробное число, то

$$n = \frac{r}{s}$$

Степенью числа $a > 0$ *с рациональным показателем*

$n = \frac{r}{s}$ r – *целое число, а* s – *натуральное* $(s > 1)$,

называется число $\sqrt[s]{a^r}$.

$$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r} \quad a > 0$$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей, по определению

$$\boxed{0^{\frac{r}{s}} = 0, \quad \frac{r}{s} > 0}$$

Свойства степени с рациональным показателем

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a > 0,$$

$$b > 0$$

$$Если\ a > 1\ и\ m, n - рациональные\ числа$$

$$m > n,\ то\quad a^m > a^n$$

$$Если\ 0 < a < 1\ и\ m > n,\ то\quad a^m < a^n$$

$$если\ m - рациольное\ число\ m > 0$$

$$и\ 0 < a < b,\ то$$

$$a^m < b^m$$

$$если\ m < 0,\ то$$

$$a^m > b^m$$

1.Представить в виде корня из числа выражение:

$$1)\,7^{1,3} = 7^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{7^{13}}$$

$$2)\,7^{-\frac{4}{9}} = 7^{\frac{-4}{9}} = \sqrt[9]{7^{-4}} =$$

$$\sqrt[9]{\frac{1}{7^4}} = \frac{\sqrt[9]{1}}{\sqrt[9]{7^4}} = \frac{1}{\sqrt[9]{7^4}}$$

2. Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$$1)\sqrt[7]{a^{-5}} = a^{\frac{-5}{7}} = a^{-\frac{5}{7}}$$

$$2)\sqrt[3]{5a} = (5a)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$$

3. Найти значение выражения:

$$\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=(40)^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=$$

$$=\left(2^{3}\cdot 5\right)^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=(2^{3})^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=$$

$$=2^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=\left(2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(5^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}\right)=$$

$$=2^{1}\cdot 5^{1}=10$$

4. Преобразовать выражение:

$$1)\ \frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(y^{\frac{1}{4}}\right)^2}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$$

$$2)\ \frac{x-27}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3-3^3}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9\right)}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}=x^{\frac{1}{3}}-3$$

5. Сравнить числа:

$$1)\sqrt[5]{8}\ и\ 2^{\frac{2}{7}}$$

$$2)2^{300}\ и\ 3^{200}$$

1)