

Арифметический корень n -ой степени

Свойства корня.

Решение иррациональных
уравнений и неравенств.

Арифметическим корнем n -ой степени из числа a
называется *неотрицательное число,*

n -я степень которого равна a .

$$\sqrt[n]{a} = x$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^n = a. \end{cases}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ если } a \geq 0$$

$$\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}, \text{ если}$$

m - нечетное

$$x^n = a$$

n - четное

$$a \geq 0$$

Два корня

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt[n]{a}, \\ x_2 = -\sqrt[n]{a}. \end{array} \right.$$

n - нечетное

a – любое

Один корень

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Свойства арифметического корня n -ой степени

Для любого натурального n , целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполняются равенства:

$$1. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b \neq 0)$$

$$3. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, (k > 0)$$

$$4. \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nk]{a^k}, (k > 0)$$

$$5. \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k, (\text{если } k \leq 0, \text{ то } a \neq 0)$$

6. Для любых чисел a и b , таких что $0 \leq a < b$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

1. Вычислить:

$$1) \sqrt{7\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$2) \sqrt[3]{0,343} = 0,7$$

$$343 = 7^3$$

$$3) \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$$

$$4) \sqrt[10]{32^2} = \sqrt[5]{32} = 2$$

2. Сравнить числа

$$1) \sqrt[3]{5} \text{ и } \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$27 > 25 \quad \sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$$

3. Расположить числа в порядке возрастания:

$$\sqrt[5]{4}, \sqrt[6]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}, \sqrt[10]{25}$$

$$\sqrt[6]{3 \cdot \sqrt[5]{3}} = \sqrt[6]{\sqrt[5]{3^5} \cdot 3} = \sqrt[30]{3^6} = \sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[10]{25} = \sqrt[10]{5^2} = \sqrt[5]{5}$$

$$3 < 4 < 5 \quad \sqrt[5]{3} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[5]{5}$$

$$\sqrt[6]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}; \sqrt[5]{4}; \sqrt[10]{25}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n - \text{нечетное} \\ |a|, & \text{если } n - \text{четное} \end{cases}$$

4. Вынести множитель из под знака корня:

$$1) \sqrt[4]{32a^6y^4}, a \leq 0, y \geq 0$$

$$\sqrt[4]{32a^6y^4} = \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{a^6} \cdot \sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} \cdot \sqrt{|a^3|} \cdot |y| =$$

$$= 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{-a^3} \cdot y = 2y\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{-a^3}$$

$$2) \sqrt[3]{0,25} \cdot (\sqrt[3]{4} + 2 \cdot \sqrt[3]{32} - 4\sqrt[3]{108}) =$$

$$\sqrt[3]{0,25} \cdot \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{0,25} \cdot \sqrt[3]{32} - 4\sqrt[3]{0,25} \cdot \sqrt[3]{108} =$$

$$= \sqrt[3]{1} + 2\sqrt[3]{8} - 4\sqrt[3]{27} = 1 + 4 - 12 = -7$$

$$3) \frac{\sqrt{28} \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 7} \cdot \sqrt{9 \cdot 5}}{\sqrt{5 \cdot 7}} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}} = 6$$

$$4) \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(4 - 2\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt[4]{16 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt[4]{24 - 16\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{4 \cdot (6 - 4\sqrt{2})} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} =$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{4 \cdot (6 - 4\sqrt{2})} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{4 \cdot (6 - 4\sqrt{2}) \cdot (6 + 4\sqrt{2})} = \\ & = \sqrt[4]{4 \cdot (36 - 32)} = \sqrt[4]{16} = 2 \end{aligned}$$

$$5) \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} - 2} =$$

Сравним 2 и $\sqrt{3}$.

$$2 = \sqrt{4};$$

$$4 > 3, \sqrt{4} > \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} < 2$$

Второй множитель в данном выражении не представлен арифметическим корнем третьей степени.

$$\begin{aligned}
5) & \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \cdot \left(-\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right) = \\
& = -\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2} = \\
& -\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{4-2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \\
& = -\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7-4\sqrt{3}} = -\sqrt[6]{(7+4\sqrt{3}) \cdot (7-4\sqrt{3})} = \\
& = -\sqrt[6]{49-48} = -\sqrt[6]{1} = -1
\end{aligned}$$

5. Внести множитель под знак корня

$$1) a^4 \sqrt{a}$$

$$2) a \sqrt{2}$$

$$3) -2 \sqrt{a}$$

Решение иррациональных уравнений

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестные под знаком корня.

$$\sqrt{x} = 5$$

$$\sqrt[3]{x^2 + 4x - 20} = -3$$

$$\frac{2}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x+6}}{x+4}$$

$$\sqrt[4]{x+1} + 20 = \sqrt{x+1}$$

Решение уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

1 способ: возвести обе части уравнения в квадрат, но затем необходимо **выполнить проверку полученных значений.**

2 способ: применение определения арифметического квадратного корня.

$$\sqrt{a} = t,$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 = a. \end{cases}$$

Решить уравнения:

$$1) \sqrt{15 - 3x} = x + 1$$

1 способ: $(\sqrt{15 - 3x})^2 = (x + 1)^2$

$$15 - 3x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x_1 = -7, x_2 = 2$$

Проверка:

если $x = -7$, то $\sqrt{15 - 3 \cdot (-7)} = -7 + 1$, $\sqrt{36} = -6$

неверное равенство, $x = -7$ – посторонний корень

если $x = 2$, то $\sqrt{15 - 3 \cdot 2} = 2 + 1$, $\sqrt{9} = 3$ $x = 2$ – корень уравнения

Ответ: 2

$$\sqrt{15 - 3x} = x + 1$$

2 способ:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ (x + 1)^2 = 15 - 3x, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 2x + 1 = 15 - 3x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 5x - 14 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ \begin{cases} x = -7, \\ x = 2, \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 2

$$2)(x+2)\sqrt{23x-14-3x^2} = 0$$

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом имеют СМЫСЛ.

$$\left\{ \begin{array}{l} 23x - 14 - 3x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0, \\ 23x - 14 - 3x^2 = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 23x - 14 - 3x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 7, \\ x = \frac{2}{3}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Проверка:

$$3) \sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1} - 2 = 0$$

$$\sqrt[4]{(x+1)^2} - \sqrt[4]{x+1} - 2 = 0$$

Замена: $\sqrt[4]{x+1} = t$ $t^2 - t - 2 = 0$

$$\begin{cases} t = -1, \\ t = 2. \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{x+1} = -1 \quad \text{- Нет корней}$$

$$\sqrt[4]{x+1} = 2, \quad \begin{cases} 2 \geq 0, \\ 2^2 = x+1, \end{cases} \quad x = 3$$

Ответ: 3

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 10, \\ \sqrt{y+1} \cdot \sqrt{x-1} = 16. \end{cases}$$

Замена: $\sqrt{x-1} = a, \sqrt{y+1} = b$

$$\begin{cases} a + b = 10, \\ a \cdot b = 16, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 10 - b, \\ (10 - b) \cdot b = 16, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 8, \\ b_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ b_1 = 8, \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2, \\ \sqrt{y+1} = 8, \end{cases} \begin{cases} x-1 = 4, \\ y+1 = 64, \end{cases} \begin{cases} x = 5, \\ y = 63. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 8, \\ b_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x-1} = 8, \\ \sqrt{y+1} = 4, \end{cases} \begin{cases} x = 65, \\ y = 15. \end{cases}$$

Ответ: $(5; 63), (65; 15)$

Решение уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

1 способ: возвести обе части уравнения в квадрат, но затем необходимо **выполнить проверку полученных значений.**

2 способ: применение определения арифметического квадратного корня.

$$\sqrt{a} = t,$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 = a. \end{cases}$$

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{3x+1} = x-1$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ (x-1)^2 = 3x+1, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 2x + 1 = 3x + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 5x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 5, \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: 5

2. Решить уравнение:

$$2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$$

Замена: $\sqrt[4]{x} = t$ $2t^2 - t = 1,$ $2t^2 - t - 1 = 0$ $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -\frac{1}{2}. \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1, \\ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}, \text{ нет решений.} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sqrt{x} = 1 \\ x = 1 \end{array}$$

Ответ: 1

3. Решить уравнение:

$$(x+1) \cdot \sqrt{5x^2 + 22x - 15} = 0$$

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом имеют СМЫСЛ.

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x^2 + 22x - 15 \geq 0, \\ x + 1 = 0, \\ \sqrt{5x^2 + 22x - 15} = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 5x^2 + 22x - 15 \geq 0, \\ x = -1, \\ x = -5, \\ x = \frac{3}{5}, \end{array} \right.$$

Проверка: $x = -1$, $x = -5$, $x = \frac{3}{5}$

Ответ: -5; 0,6

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = 3, \end{cases} \quad \text{Замена: } \sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$$

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 - b^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 + b, \\ (1 + b)^2 - b^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 + b, \\ b = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ \sqrt{y} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (4;1)

**Степень с рациональным
показателем**

Если n – натуральное число, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad a^1 = a$$

Если n – целое число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1, (a \neq 0)$$

Свойства степени:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Свойства степени:

Если $a > 1$ и $m > n$, то $a^m > a^n$

Если $0 < a < 1$ и $m > n$, то $a^m < a^n$

Если n – дробное число, то

$$n = \frac{r}{s}$$

Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем

$n = \frac{r}{s}$ r – целое число, а s – натуральное ($s > 1$),

называется число $\sqrt[s]{a^r}$.

$$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r} \quad a > 0$$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей, по определению

$$0^{\frac{r}{s}} = 0, \quad \frac{r}{s} > 0$$

Свойства степени с рациональным показателем

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a > 0,$$

$$b > 0$$

Если $a > 1$ и m, n – рациональные числа

$m > n$, то $a^m > a^n$

Если $0 < a < 1$ и $m > n$, то $a^m < a^n$

если m – рациональное число $m > 0$

и $0 < a < b$, то

$$a^m < b^m$$

если $m < 0$, то

$$a^m > b^m$$

1. Представить в виде корня из числа выражение:

$$1) 7^{1,3} = 7^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{7^{13}}$$

$$2) 7^{-\frac{4}{9}} = 7^{\frac{-4}{9}} = \sqrt[9]{7^{-4}} =$$

$$\sqrt[9]{\frac{1}{7^4}} = \frac{\sqrt[9]{1}}{\sqrt[9]{7^4}} = \frac{1}{\sqrt[9]{7^4}}$$

2. Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$$1) \sqrt[7]{a^{-5}} = a^{\frac{-5}{7}} = a^{-\frac{5}{7}}$$

$$2) \sqrt[3]{5a} = (5a)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$$

3. Найти значение выражения:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} &= (40)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \\ &= (2^3 \cdot 5)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \left(2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(5^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}\right) = \\ &= 2^1 \cdot 5^1 = 10 \end{aligned}$$

4. Преобразовать выражение:

$$1) \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{4}}\right)^2}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}$$

$$2) \frac{x-27}{x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3^3}{x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 9} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right) \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 9\right)}{x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = x^{\frac{1}{3}} - 3$$

5. Сравнить числа:

1) $\sqrt[5]{8}$ и $2^{\frac{2}{7}}$

2) 2^{300} и 3^{200}

1)