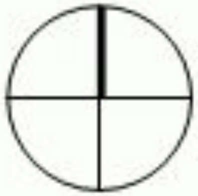
Моя тригонометрия

$\sin x = a$.

1). $\sin x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;

2). $\sin x = 1$, $x = \pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\sin x = -1$, $x = -\pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;

4). $\sin x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

5). $\sin x = a$, $|a| \le 1$, $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, k – любое целое число.

$\cos x = a$.

1). $\cos x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;

2). $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, k – любое целое число;

3). $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, k – любое целое число;

4). $\cos x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

5). $\cos x = a$, $|a| \le 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, k – любое целое число.

*Условные обозначения :
tan -тангенс
cot - котангенс

$\tan x = a$.

1). $\tan x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;

2). $\tan x = a$, $x = \arctan a + \pi k$, k – любое целое число.

$\cot x = a$.

1). $\cot x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;

2). $\cot x = a$, $x = \operatorname{arccot} a + \pi k$, k – любое целое число.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: 1. *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида (см. выше)
2. *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения.

Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений.

1. Алгебраический метод. **Этот метод нам хорошо известен из алгебры (метод замены переменной и подстановки).**

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6)-3\sin(\pi/3-x)+1=0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6)-3\cos(x+\pi/6)+1=0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6)=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$,

находим корни: $y_1=1$, $y_2=1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6)=1$, 2). $\cos(x+\pi/6)=1/2$,

$x+\pi/6=2\pi k$, $x+\pi/6=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$,

$x_1=-\pi/6+2\pi k$; $x_2=\pm\pi/3-\pi/6+2\pi n$.

2. Разложение на множители. **Этот метод рассмотрим на примерах.**

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.

$$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

1). $\sin(x/2) = 0$,

$x/2 = \pi k$,

$x_1 = 2\pi k$;

2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0$,

$\tan(x/2) = 1$,

$x/2 = \arctan 1 + \pi n$,

$x/2 = \pi/4 + \pi n$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

2. Разложение на множители.

П р и м е р 2. Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Р е ш е н и е . $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0 ,$$

$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0 ,$$

1). $\sin x = 0$,

$x_1 = \pi k$;

2). $\cos x - \sin x = 0$,

$\tan x = 1$,

$x_2 = \pi / 4 + \pi n$,

2. Разложение на множители.

П р и м е р 3. Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

Р е ш е н и е. $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$,

$$2 \cos 4x \cos 2x = 2 \cos^2 4x,$$

$$\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0,$$

$$\cos 4x \cdot 2 \sin 3x \cdot \sin x = 0,$$

1). $\cos 4x = 0$, 2). $\sin 3x = 0$, 3). $\sin x = 0$,

$4x = \pi / 2 + \pi k$, $3x = \pi n$, $x_3 = \pi m$.

$x_1 = \pi / 8 + \pi k / 4$; $x_2 = \pi n / 3$;

3. Приведение к однородному уравнению.

Уравнение называется *однородным относительно* sin *и* cos, *если все его члены одной и той же степени относительно* sin *и* cos *одного и того же угла*.

Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

в) приравнять все множители и скобки нулю;

г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;

д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tan .

П р и м е р .   Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2.$

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0$,

$\tan^2 x + 4 \tan x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

1) $\tan x = -1$,   2) $\tan x = -3$,

$x_1 = -\pi / 4 + \pi k$; $x_2 = -\arctan 3 + \pi n$.

4. Переход к половинному углу.

Рассмотрим этот метод на примере:

П р и м е р . Решить уравнение: $3 \sin x - 5 \cos x = 7$.

Р е ш е н и е .

$$6 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) - 5 \cos^2(x/2) + 5 \sin^2(x/2) =$$

$$= 7 \sin^2(x/2) + 7 \cos^2(x/2),$$

$$2 \sin^2(x/2) - 6 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) + 12 \cos^2(x/2) = 0,$$

$$\tan^2(x/2) - 3 \tan(x/2) + 6 = 0,$$

5. Введение вспомогательного угла.

Рассмотрим уравнение вида:

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ (корректно ли это?):

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C},$$

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = C,$$

или $$\sin(x+\varphi) = C,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k,$

где $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3}\ \sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$:

$$(\sqrt{3}\ /\ 2) \cdot \sin 3x - (1\ /\ 2) \cdot \cos 3x = 1\ /\ 2\ ,$$

$$\cos(\pi\ /\ 6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi\ /\ 6) \cdot \cos 3x = 1\ /\ 2\ ,$$

$$\sin(3x - \pi\ /\ 6) = 1\ /\ 2\ ,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi\ /\ 18 + \pi\ /\ 18 + \pi k\ /\ 3$.

6. Преобразование произведения в сумму.

Здесь используются соответствующие формулы.

П р и м е р . Решить уравнение: $2 \sin 2x \cdot \sin 6x = \cos 4x$.

Р е ш е н и е . Преобразуем левую часть в сумму:

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x ,$$

$$\cos 8x = 0 ,$$

$$8x = p / 2 + pk ,$$

$$x = p / 16 + pk / 8 .$$

7. Универсальная подстановка.

Рассмотрим этот метод на примере.

П р и м е р . Решить уравнение: 3 sin *x* – 4 cos *x* = 3 .

Р е ш е н и е . Здесь возможны два случая:

1). $x \neq (2m+1)\pi$, тогда

$$3\,\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} - 4\,\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = 3\,,$$

$$6\tan(x/2) - 4 + 4\tan^2(x/2) = 3 + 3\tan^2(x/2)\,,$$

$$\tan^2(x/2) + 6\tan(x/2) - 7 = 0\,,$$

делаем замену: $\tan(x/2) = u$, тогда $u^2 + 6u - 7 = 0$,

корни этого уравнения: $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

Тригонометрические уравнения

Решить уравнения:

12.001. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}\,(\cos x - \sin 3x)$.

12.002. $\sin z \cdot \sin(60° - z) \cdot \sin(60° + z) = 1/8$

12.003. $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = 0.25 \sin 12x$.

12.004. $\sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0$.

12.005. $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3$.

12.007. $\sin^3 z \cdot \cos z - \sin z \cdot \cos^3 z = \sqrt{2}/8$.

12.008. $\frac{\cot 2z}{\cot z} + \frac{\cot z}{\cot 2z} + 2 = 0$.

12.009. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$.