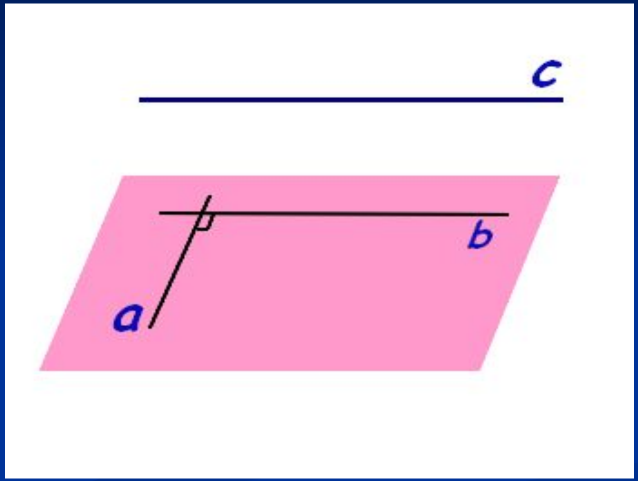
Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: a ⊥b. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.



На этом рисунке перпендикулярные прямые *a* и *b* пересекаются, а перпендикулярные прямые *a* и *c* скрещивающиеся

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой

Дано: $a \parallel b$ и $a \perp$ c.

Доказать: $b \perp c$.

Доказательство:

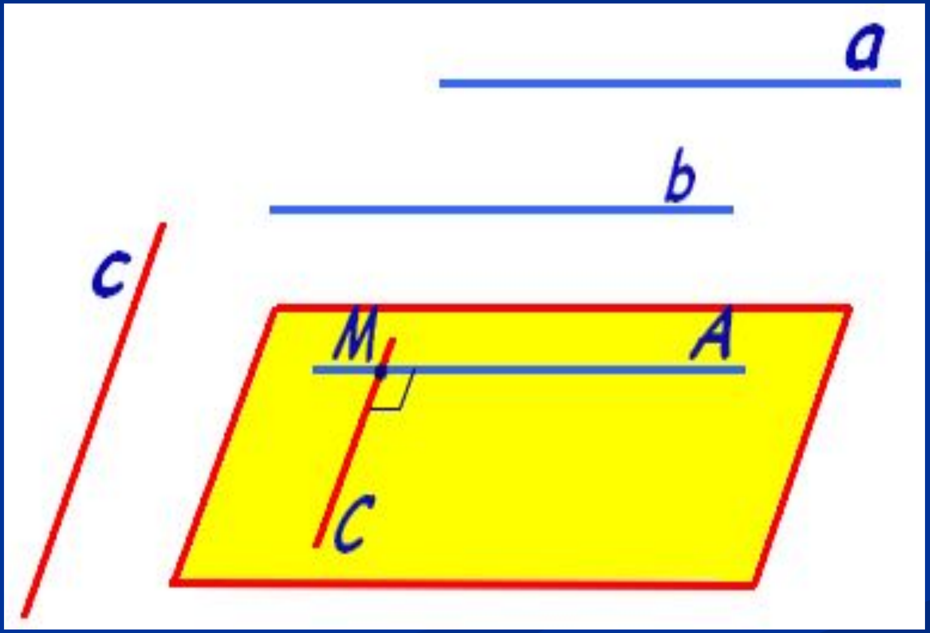
Через произвольную точку М пространства, не лежащую на данных прямых, проведём прямые *МА* и МС, *параллельные соответственно прямым а и с*. Т.к. $a \perp c$, то ∠АМС =90°

Т.к. $a \parallel b$, $a \parallel$ МА, то $b \parallel$ МА.

Итак, $b \parallel$ МА, $c \parallel$ МС,

∠ АМС = 90°, т. е. $b \perp c$.

Лемма доказана.



Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

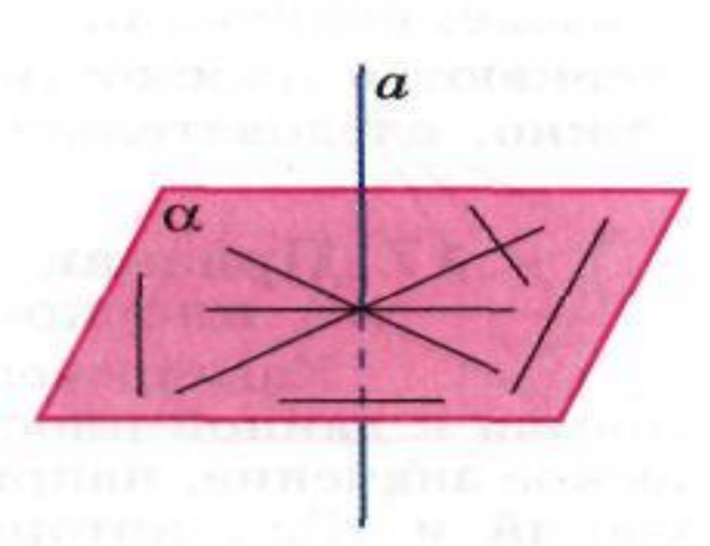


Рис. 45

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так:

$a \perp \alpha$.

Теорема: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Дано: $a \parallel a_1$, $a \perp \alpha$.

Доказать: $a_1 \perp \alpha$

Доказательство:

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α. Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. *По* лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

$\perp$

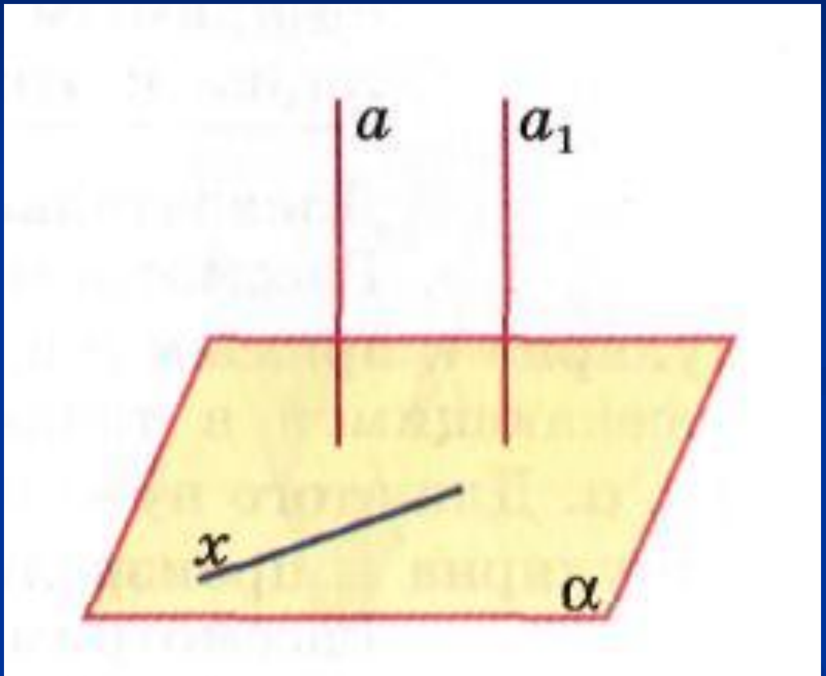
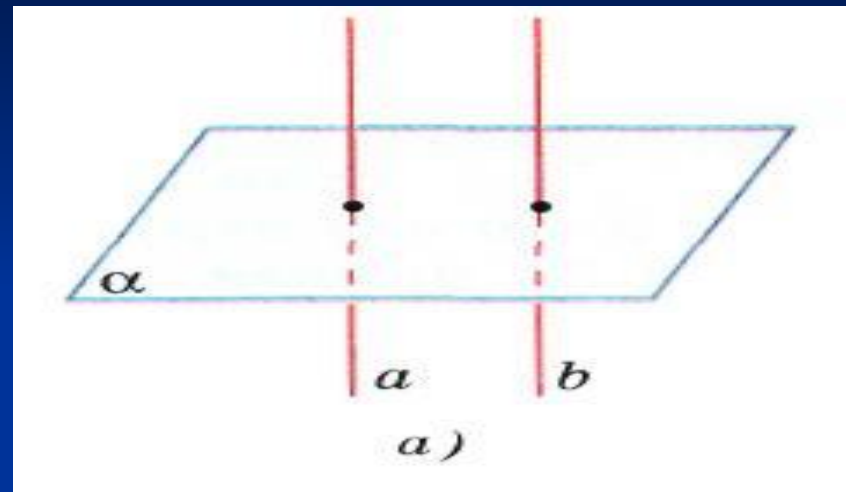


Рис. 46

Теорема: Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Дано: a $\perp\alpha$,b $\perp\alpha$ (a)
Доказать : $a \parallel b$.
Доказательство:
Через какую-нибудь точку М прямой *b* проведем прямую b_1, параллельную прямой а. По предыдущей теореме $b_1 \perp\alpha$. Докажем ,что прямая b_1 совпадает с прямой *b* .Тем самым будет доказано , что $a \parallel b$.Допустим ,что прямые *b* и b_1 не совпадают .**Тогда в плоскости β, содержащей прямые *b* и *b*1, через точку М проходят две прямые, перпендикулярные к прямой *c* ,по которой пересекаются плоскости α и β (б).Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана.**



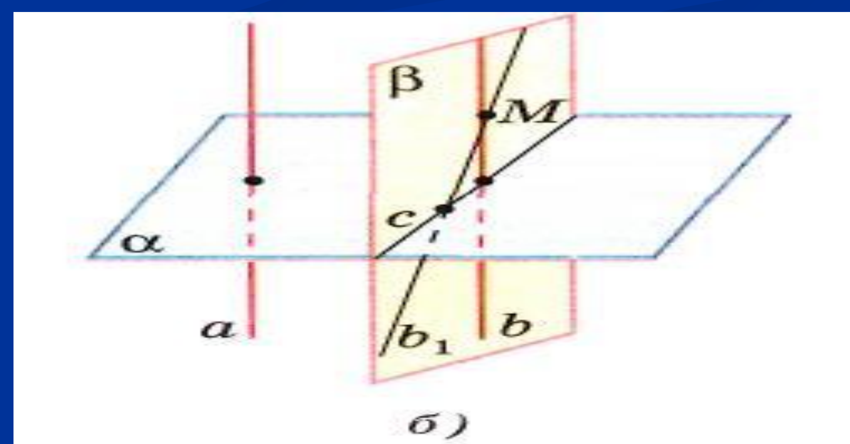


Рис. 47

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема: Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Дано: $a \perp p$, $a \perp q$, p и q лежат в плоскости α.

$p \cap q = O$. *Доказать: $a \perp \alpha$*

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда прямая *a* проходит через т. O(рис. а). Проведём через т.O прямую *l*, параллельную прямой *m* . Отметим на прямой *a* точки A и B, чтобы AO=OB, и проведём в плоскости α прямую, пересекающую прямые *p, q* и *l* соответственно в т. *P, Q* и *L.*

Т.к. *p* и *q* – серединные перпендикуляры к отрезку AB, то AP=BP и AQ=BQ. Следовательно, ΔAPQ= ΔBPQ по трём сторонам, поэтому углы APQ и BPQ равны

ΔAPL= ΔBPL(по двум сторонам и углу между ними), поэтому AL=BL. Следовательно ΔABL-равнобедренный и $l \perp a$. *Т.к.* $l \parallel m$, $l \perp a$, то $m \perp a$. (по лемме)Итак $a \perp \alpha$.

Рассмотрим случай, когда прямая *a* не проходит через т.O. Проведём через т.O прямую $a_1 \parallel a$. По лемме

$a_1 \perp p$ *и* $a_1 \perp q$, поэтому $a_1 \perp \alpha$. Отсюда, $a \perp \alpha$.

Теорема доказана.

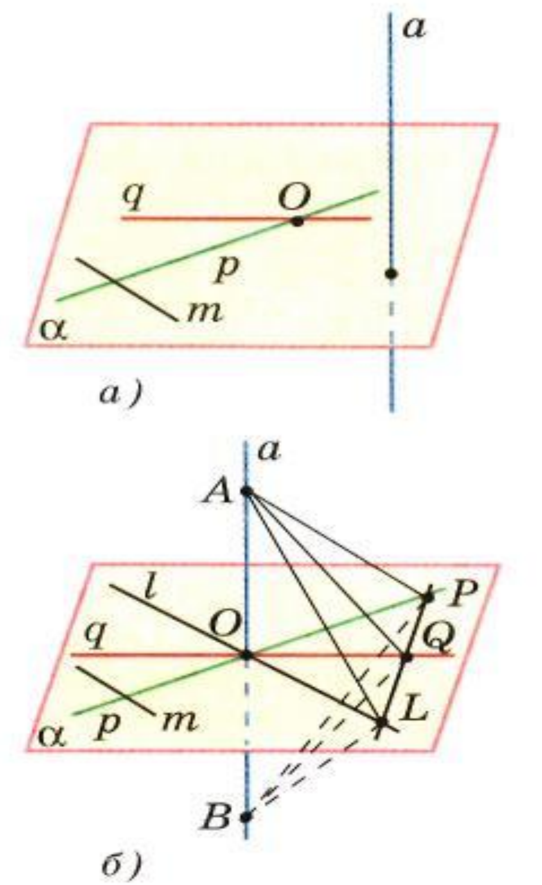


Рис. 48

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Теорема: Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости и притом только одна.

Доказательство: Данную плоскость обозначим α, а произвольную точку пространства — буквой М. *Докажем:* 1) через точку М проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α; 2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую *a* и рассмотрим плоскостьβ, проходящую через точку *M* и перпендикулярную к прямой *a.* Обозначим буквой *b* прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. В плоскости β через точку *M* проведем прямую *c*, перпендикулярную к прямой *b.* Прямая *c и е*сть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α, т.к. перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости *(c ⊥b* по построению *и c ⊥a,* так как β ⊥ α*).*

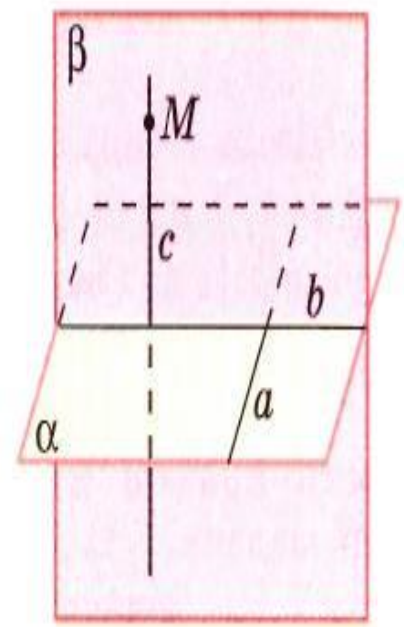


Рис. 50

2)Предположим, что через точку *M* проходит еще одна прямая (обозначим ее черезc_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда $c_1 \parallel c$, что невозможно, т. к. прямые c_1 и с пересекаются в точке *M.* Т.о., через точку *M* проходит только одна прямая, перпендикулярная плоскости α. Теорема доказана.

Слайды подготовили:

- Ученицы 10 класса «А»
  Кузёма Виктория
  Верисова Анна

Учитель Букирёва Н.В.