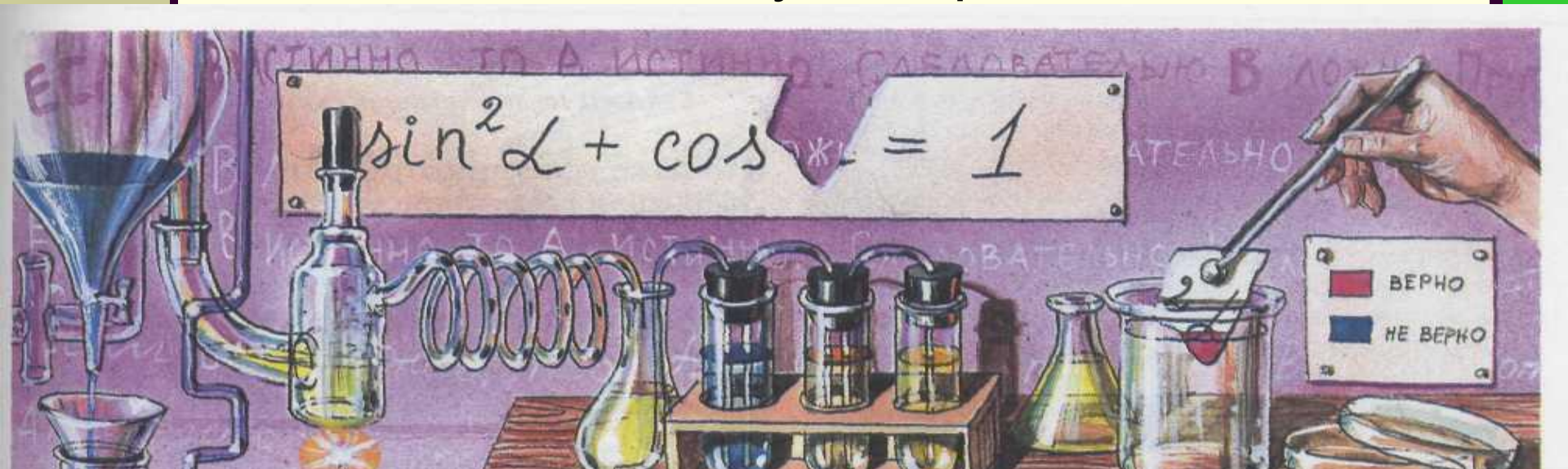
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ. РОЗВЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДІВ

Викладач ДППКу Трохимюк О.В.



«Велика книга природи може бути прочитана тільки тими, хто знає мову, на якій вона написана, і ця мова – математика.»

Галілео Галілей
(1564 – 1642)

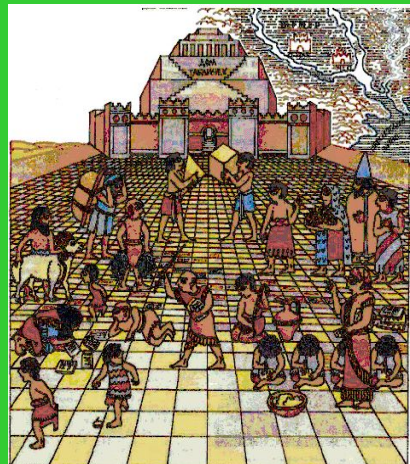
План заняття

- Історична довідка.
- Періодичні процеси.
- Тригонометричні функції числового аргументу.
- Основні тригонометричні тотожності.
- Коментування задач за допомогою комп'ютера.
- Розв'язування вправ:
- - усно;
- - колективно;
- - письмово.
- Тестовий контроль.
- Підсумок заняття.

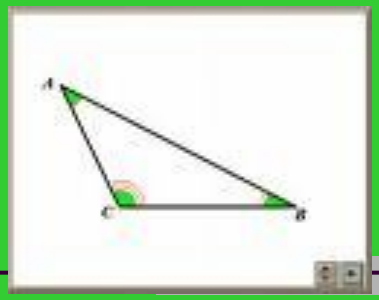
Мета

- узагальнити і систематизувати знання студентів про основні властивості тригонометричних функцій,
- формувати навички та вміння обчислювати значення тригонометричних функцій,
- тотожно перетворювати тригонометричні вирази за допомогою співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу;

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА



Історична довідка



- Термін “тригонометрія” походить від грецьких слів “тригон” – трикутник і “метризис” – вимірюю та означає у перекладі “вимірювання трикутників”, був запропонований у 1595 р.

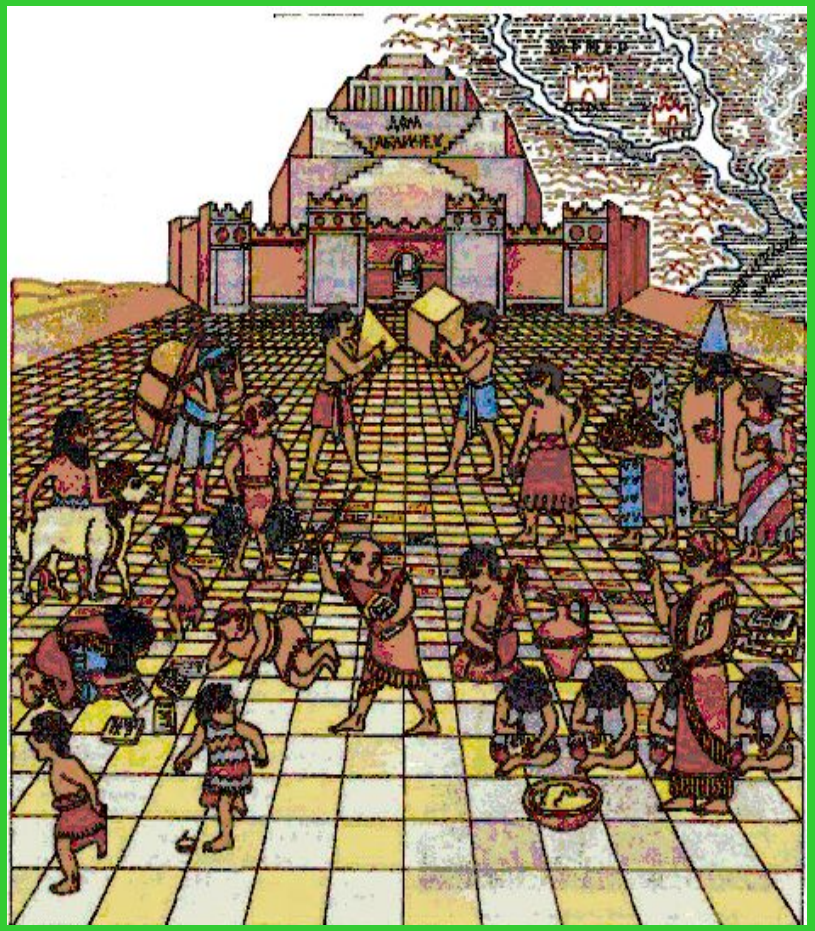
  німецьким математиком

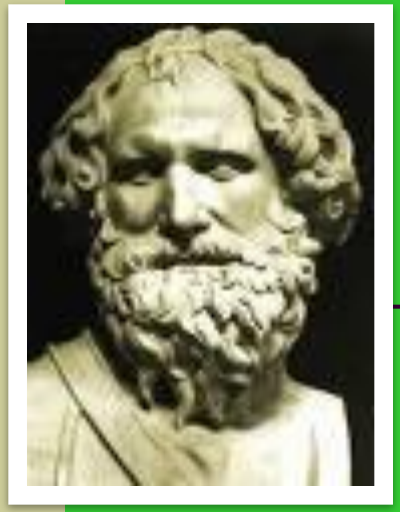
  Варфоломеєм П і т і с к о м

  (1561 - 1613).

Історична довідка

Тригонометрія, як астрономія і географія, зародилася та розвивалась у Вавилоні, Єгипті, Китаї, Індії та інших країнах.





Архимед

Євклид

Значного розвитку тригонометрія як частина астрономії набула у Стародавній Греції в роботах великих математиків Євклида, Архимеда, Апполонія Пергського.

Апполоній Пергський

Принципіальне значення мало складання Клавдієм Птолемеєм першої таблиці синусів (довгий час вона називалась таблицею хорд). З’явився практичний засіб розв’язування прикладних задач.

Історична довідка

Греки першими почали розв’язувати прямокутні трикутники, у зв’язку з чим склали тригонометричні таблиці.

За допомогою тригонометрії

давньовавилонські вчені виконували розрахунки:

- **передбачення сонячних та місячних затемнень**
- **містознаходжень**

Древньогрецький астрономом, математик

Г і п п а р х

(біля 150 р. до н. е.):

- склав перші тригонометричні таблиці;
- увів географічні координати – широту і довготу;
- визначив відстань від Землі до Місяця.

Тригонометричні таблиці високої точності було складено у XV ст. середньоазіатським ученим а л – К а ш і (XIV – XV ст.) та німецьким астрономом і математиком Р е г і о м о н т а н о м (1436 - 1476).

У Росії перші тригонометричні таблиці були видані у 1703 році, в складанні яких брав участь Леонтій Пилипович

М а г н и ц ь к и й (1669 - 1739).

Історична довідка

Вчення про тригонометричні функції почало розвиватися ще у IV – V ст. у працях індійських вчених. Термін “sinus” хоч і було введено латинською мовою у XII ст., та переклали його з індійської “архадживе”, що означає “половину хорди”.

Історична довідка

- **Термін “косинус” походить від скорочення двох слів “sinus complementi” (синус доповнення sin(90º-x)), які вживав Регіомонтан.**

И. Региомонтан

Історична довідка

- **У IX – X ст. середньоазіатські вчені ввели поняття тангенса, котангенса.**

Термін “тангенс” було введено у 1583р. німецьким математиком

Т. Ф і н к о м (1561 - 1656).

Латинське слово *“tangens”* означає “той, що дотикається”.

Термін “котангенс” походить, як і косинус, від словосполучення *“tangens complementi”*.

Сучасного вигляду вчення про тригонометричні функції набуло
Л е о н а р д а Е й л е р а (1707

Леонардо Ейлер:

- швейцарець за походження

- працював у Петербурзькій Академії наук;

- вивчав математику, фізику, астрономію;

розглядав тригонометрію як науку про тригонометричні функції.

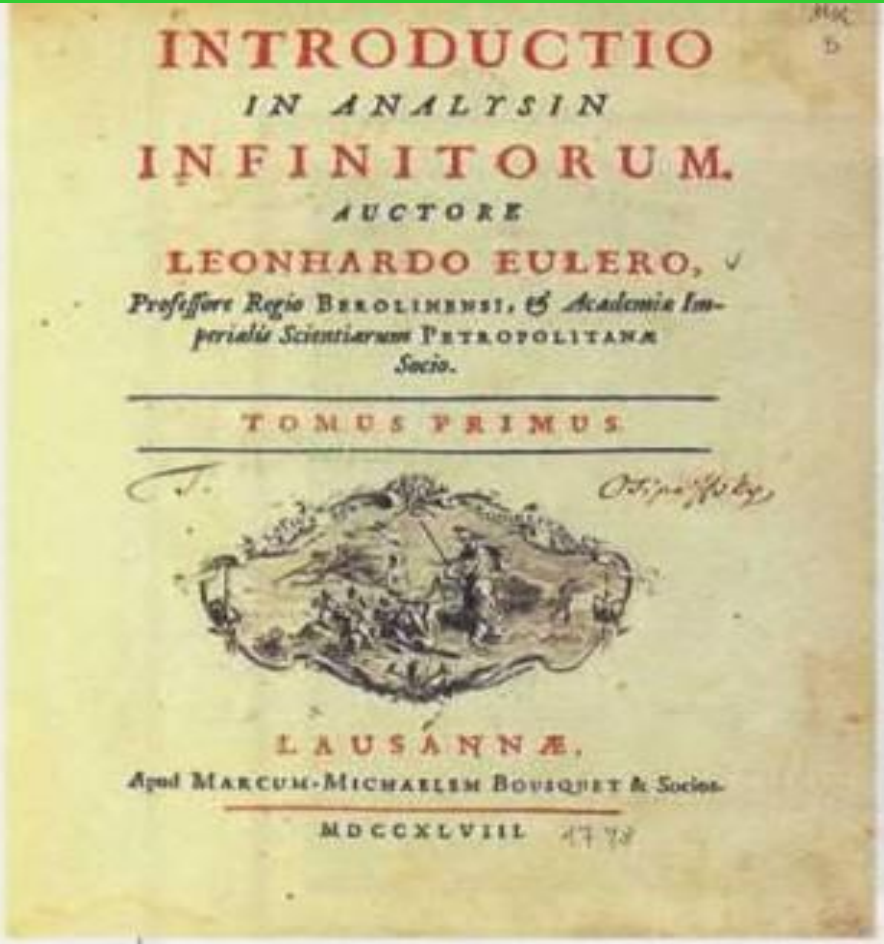
Леонардо Ейлер:

- - уперше виклав відомості про знаки тригонометричних функцій;
- - дослідив їх області визначення;
- - ввів позначення функцій sin x, cos x,
- tg x, ctgx;

Леонардо Ейлер:

- – автор ряду тригонометричних формул;
- - дав сучасне визначення тригонометричних функцій;
- - вказав на зв’язок цих функцій з показниковими функціями;
- - залишив понад 800 робіт, довів багато теорем, які стали класичними теоремами.

Титульний лист та перша сторінка книги Леонардо Ейлера «Введение в анализ бесконечных». 1748 р.



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

LIBER PRIMUS.

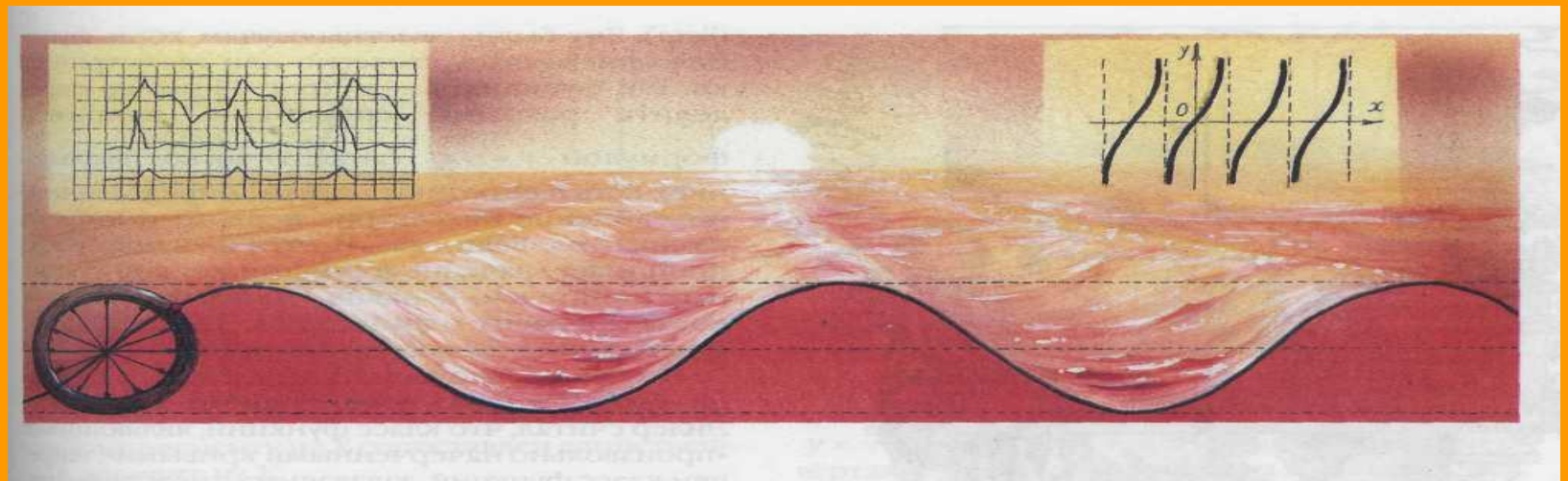
CAPUT PRIMUM.

De Functionibus in genere.

Titульный лист
и первая страница книги
Л. Эйлера «Введение
в анализ бесконечных».
1748 г.

Синусоїда

Зима за літом, ніч – за днем,
плюс змінюється мінусом,
все у природі і в людей
йде за законом синуса.

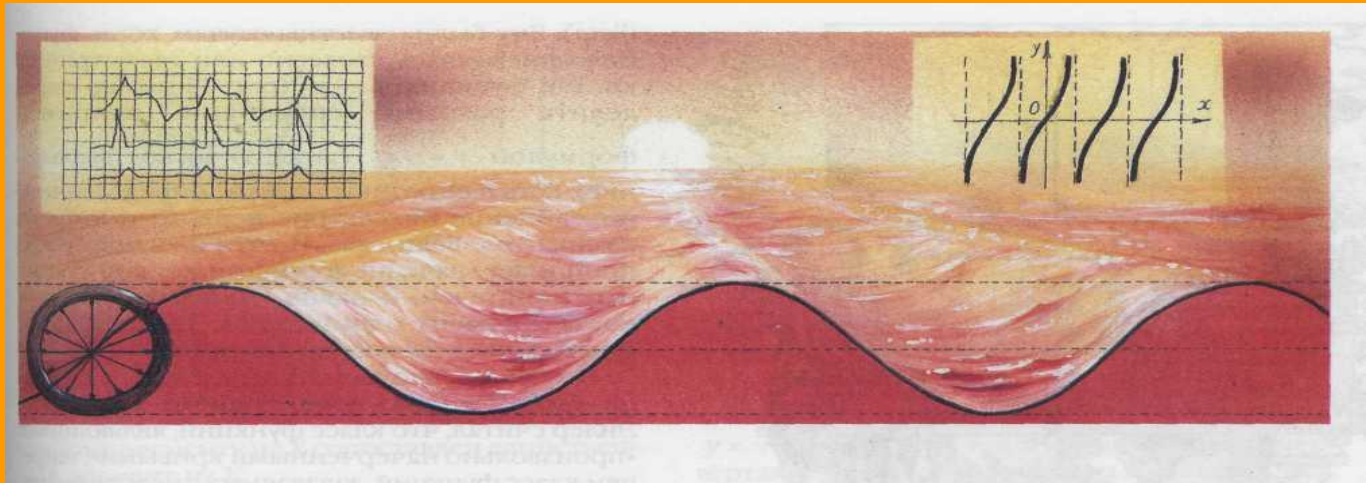


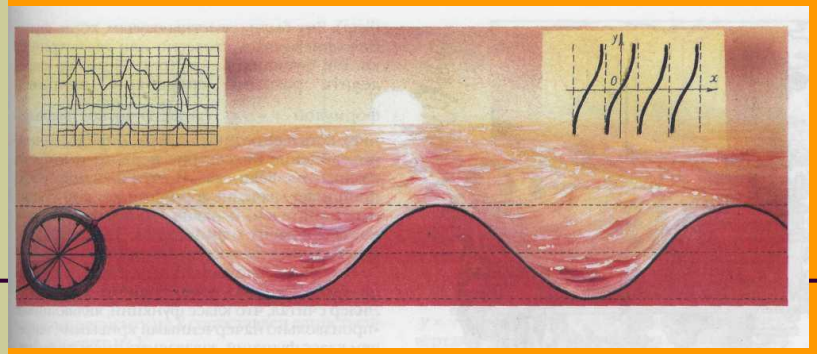
Ряди везінь і невезінь

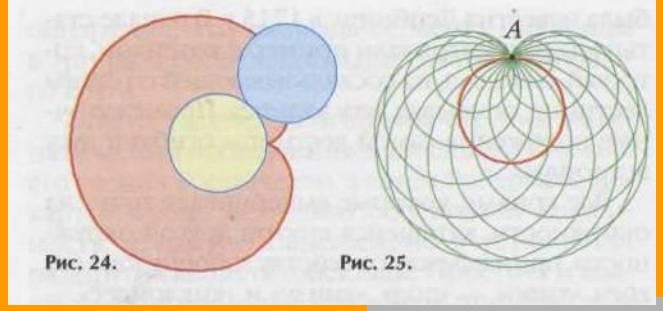
то зверху, то насподі ми.

Із березоля в березіль

виходимо й приходимо.





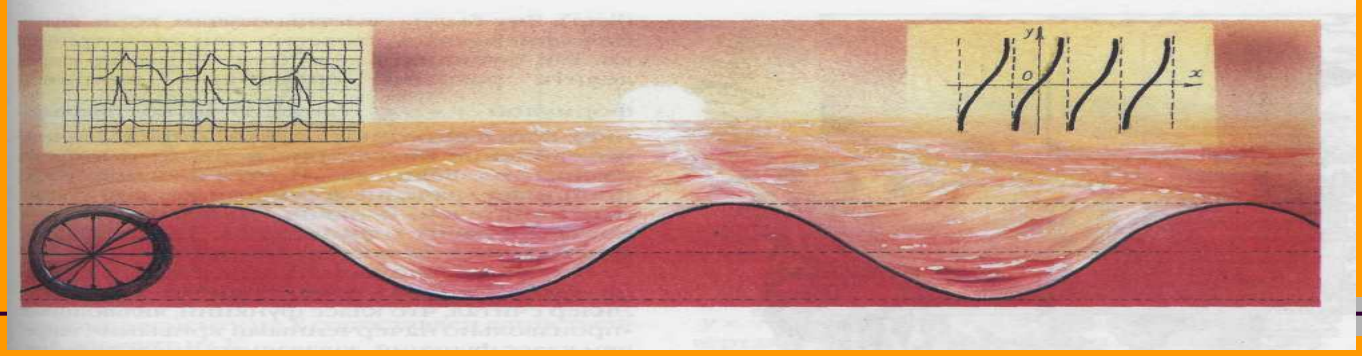


Гріхопадіння й каяття,

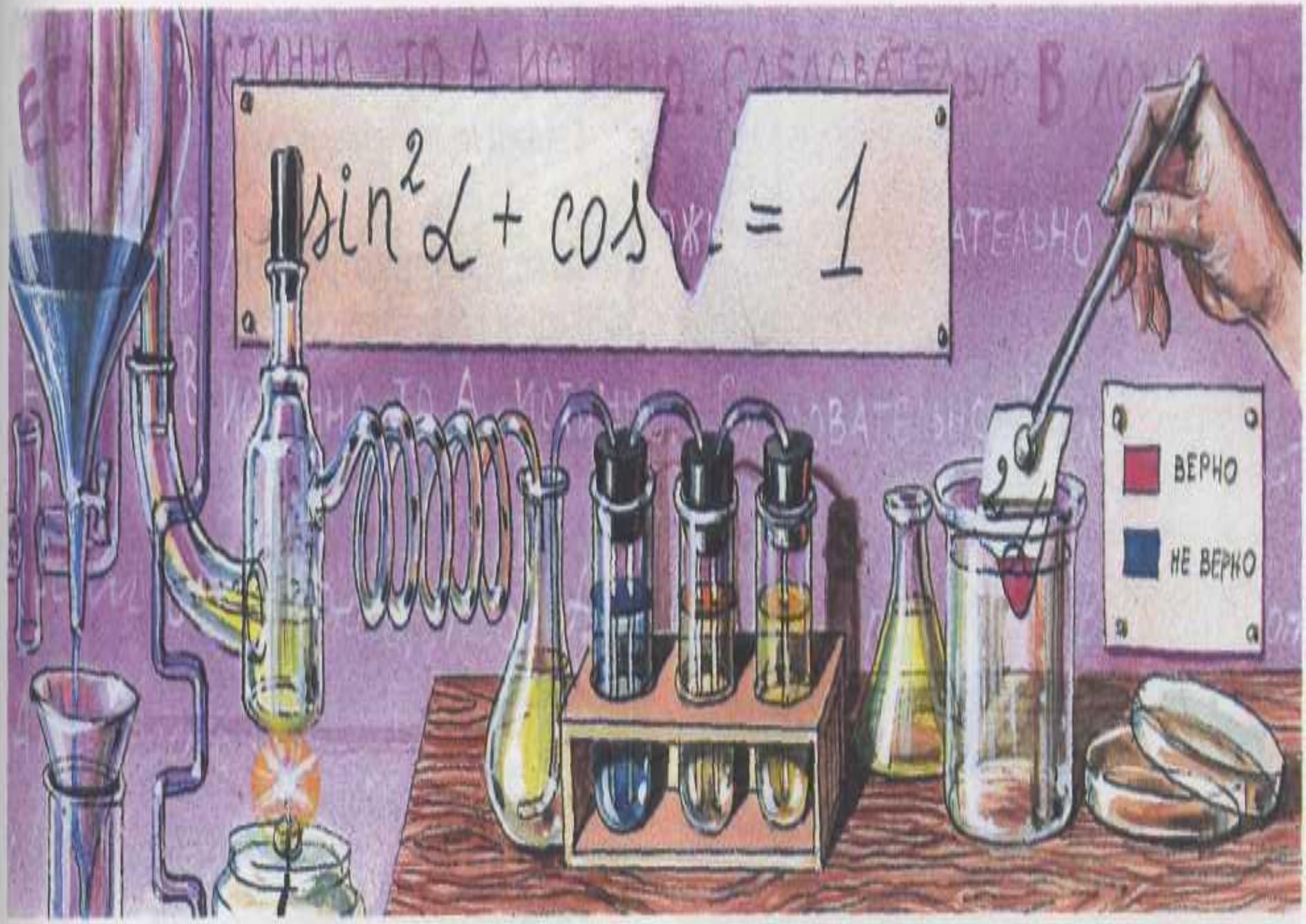
і нищення, і творення.

Проста гармонія буття:

повторення й повторення.



То вверх крокуємо, то вниз,
удачі – за невдачами;
по синусоїді кудись
всі пливемо неначе ми.


$\sin^2\alpha + \cos$
$= 1$
ВЕРНО
НЕ ВЕРНО

Сімейство

троянд

Гвідо

Сімейство троянд Гвідо Гранді

- Одного разу італійський геометр Гвідо Гранді (1671-1742) створив троянди. Ні, зовсім не ті рослини, які відомі всім.
- Троянди Гвідо Гранді милують правильними плавкими лініями.
- Їх обриси не примха природи – вони передумовлені спеціально підібраними математичними залежностями.

«Сімейство троянд Гвідо Гранді можна описати рівнянням у полярних координатах:

$$r = a \sin k\phi$$

- **де *a* і *k* –деякі сталі (постійні). На зображені ці криві при різних значеннях параметру *k*.**

На малюнку 1 зображені ці криві при різних значеннях параметра *k*

$$r = a \sin k\varphi$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦВЕТНИК

Как-то раз итальянский геометр Гвидо Гранди (1671—1742) создал розы. Нет, вовсе не те прекрасные растения, которые известны всем. Розы Гвидо Гранди радуют глаз правильными и плавными линиями, но их очертания не каприз природы — они предопределены специально подобранными математическими зависимостями. Семейство роз Гвидо Гранди описывается уравнением в полярных координатах

$$r = a \sin k\varphi,$$

где a и k — некоторые постоянные. На рис. 1 изображены эти кривые при различных значениях параметра k.

Очарованный результатами Гранди, немецкий геометр XIX в. Хабенихт также решил заняться математическим «растениеводством». Полагая, что абрис (очертание) листа или цветочного лепестка в полярных координатах описывается выражением

$$r = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ для каждого отдельного растения представляет определённую комбинацию тригонометрических функций, Хабенихт путём многочисленных экспериментов «вырастил» замечательные экспонаты (рис. 2). В наши дни подобные эксперименты удобно проводить, имея под рукой персональный компьютер.

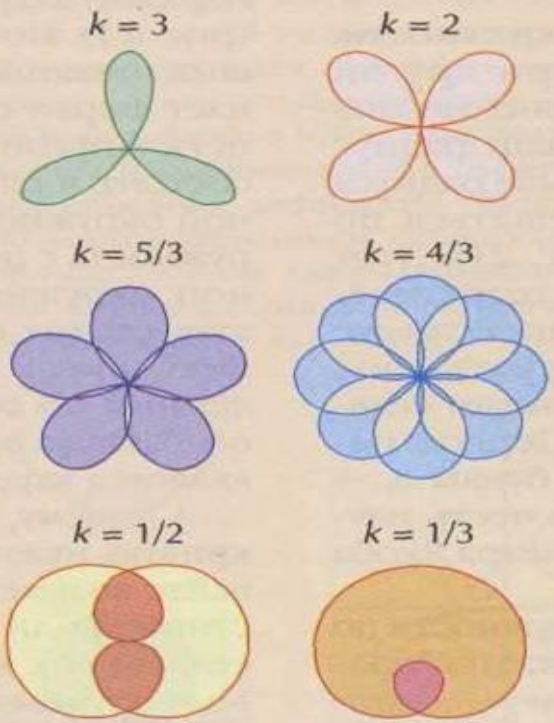


Рис. 1.

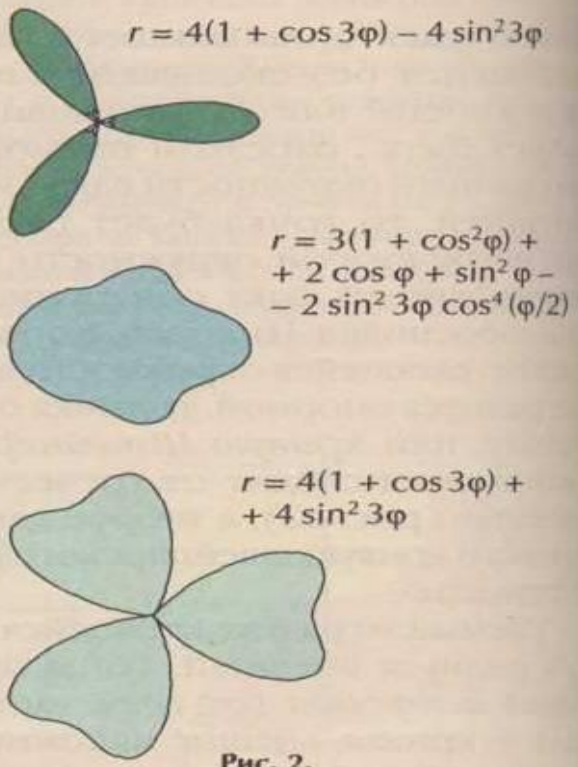


Рис. 2.

Зачарований результатами Гранді,

- німецький геометр XIX ст.

Хабеніхт також вирішив

зайнятися

математичним

«рослинознавством».

φ

- Хабеніхт шляхом різноманітних дослідів «зростив» чудові експонати (мал.2). У наші дні подібні досліди зручно проводити, маючи під рукою персональний комп’ютер.

В огромном саду геометрии каждый найдёт букет себе по вкусу.

Давил Гильберт

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦВЕТНИК

Как-то раз итальянский геометр Гвидо Гранди (1671—1742) создал розы. Нет, вовсе не те прекрасные растения, которые известны всем. Розы Гвидо Гранди радуют глаз правильными и плавными линиями, но их очертания не каприз природы — они предопределены специально подобранными математическими зависимостями. Семейство роз Гвидо Гранди описывается уравнением в полярных координатах

$$r = a \sin k\varphi,$$

где a и k — некоторые постоянные. На рис. 1 изображены эти кривые при различных значениях параметра k.

Очарованный результатами Гранди, немецкий геометр XIX в. Хабенихт также решил заняться математическим «растениеводством». Полагая, что абрис (очертание) листа или цветочного лепестка в полярных координатах описывается выражением

$$r = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ для каждого отдельного растения представляет определённую комбинацию тригонометрических функций, Хабенихт путём многочисленных экспериментов «вырастил» замечательные экспонаты (рис. 2). В наши дни подобные эксперименты удобно проводить, имея под рукой персональный компьютер.

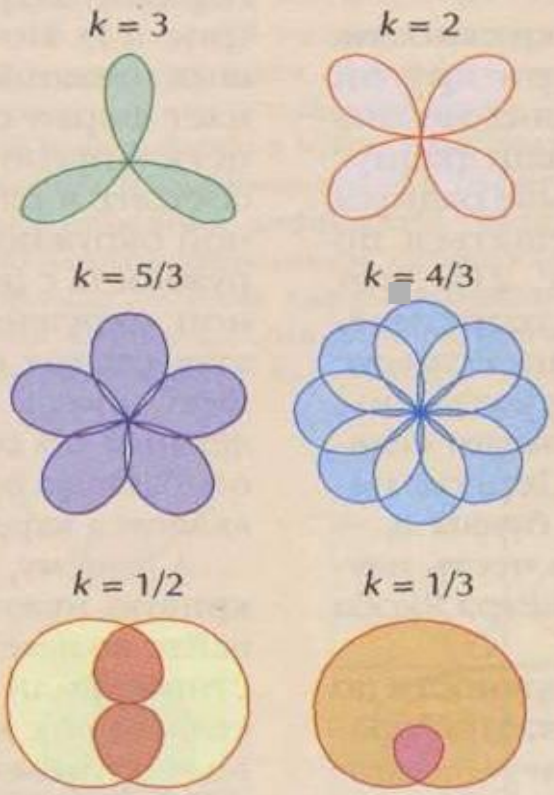


Рис. 1.

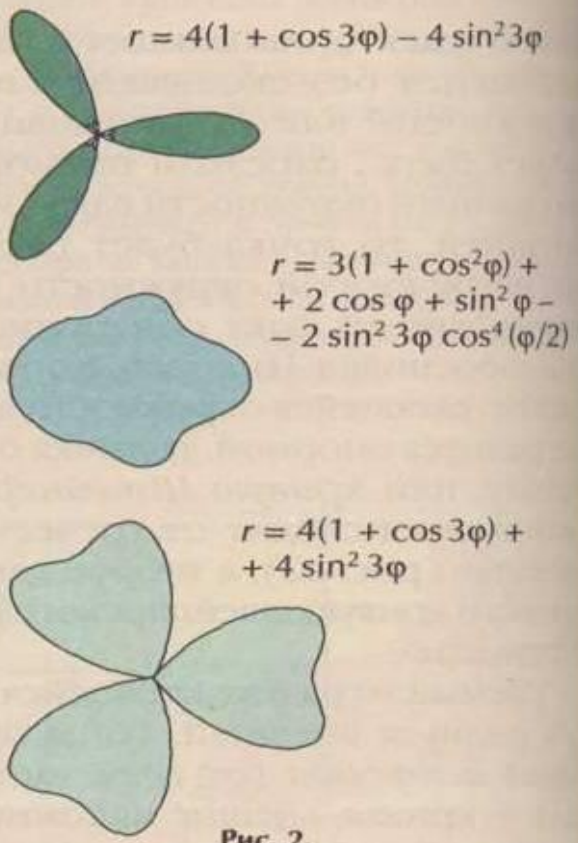
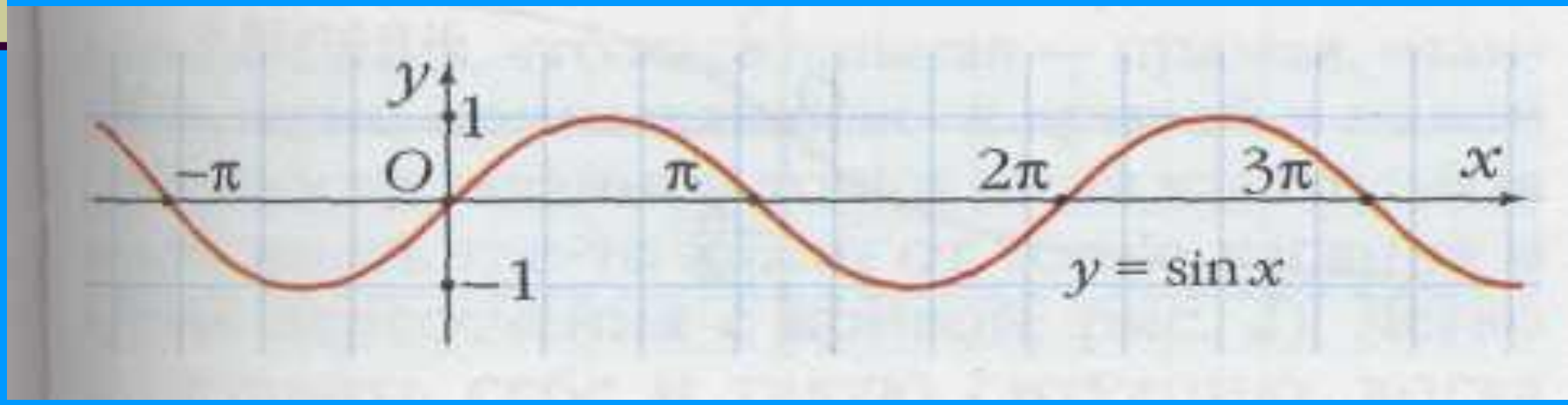


Рис. 2.

Періодичні процеси

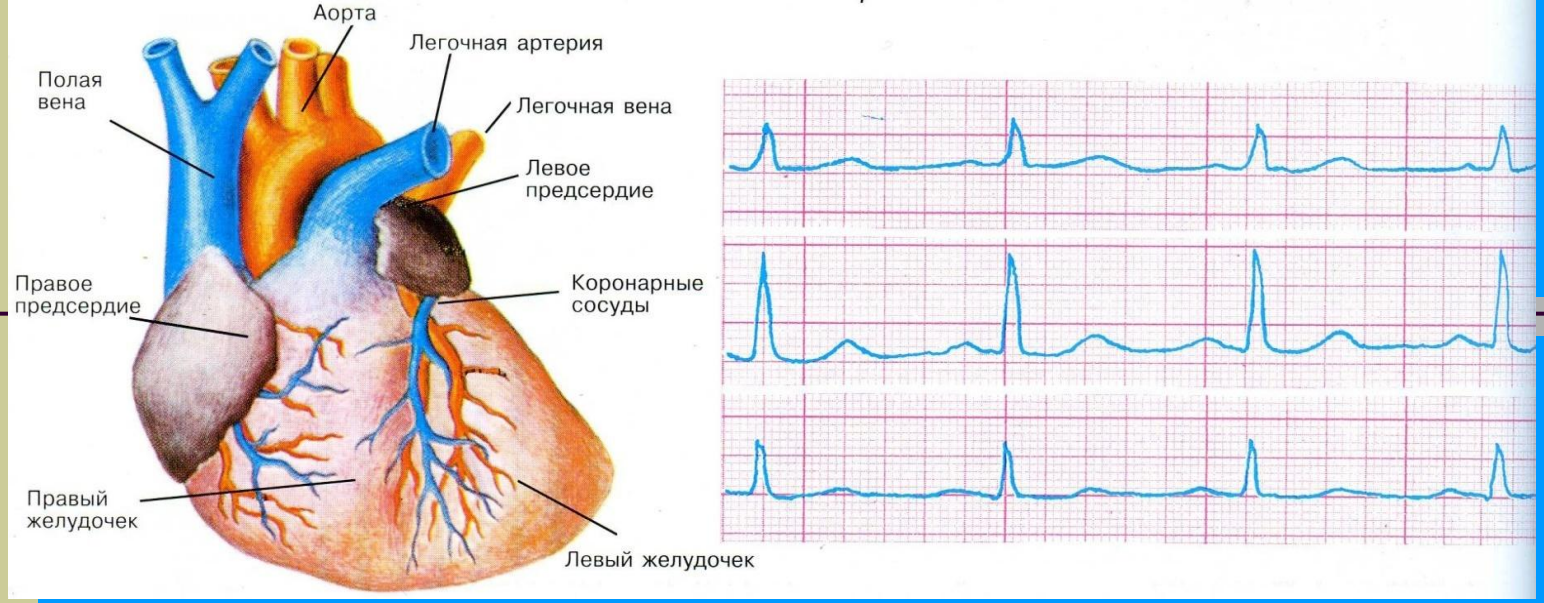
- Новий клас функцій – тригонометричні функції.
- Вони існують для опису різних періодичних процесів.
- З ситуаціями , які повторюються, людина зустрічається скрізь.



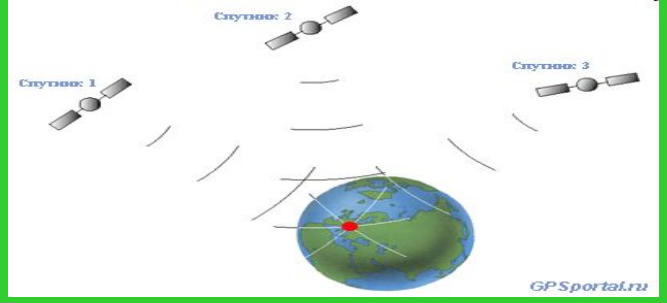
Людина давно помітила періодичну відновлюваність явищ

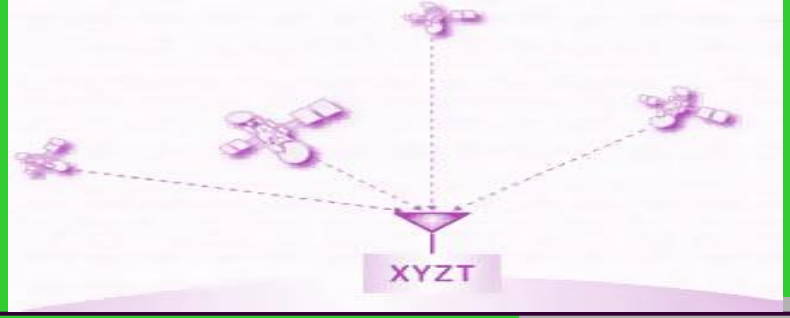
Його життя супроводжують різні астрономічні явища:

- **схід і захід Сонця,**
- **зміщення фаз Місяця,**
- **чергування пір року,**
- **положення зірок на небі,**
- **затемнення і рухи планет,**
- **морські приливи і відливи,**



- **биття серця,**
- **цикл у життєдіяльності організму,**
- **обертання колеса,**
- **наповненість міського транспорту,**
- **епідемії грипу,**
- **коливання маятнику.**





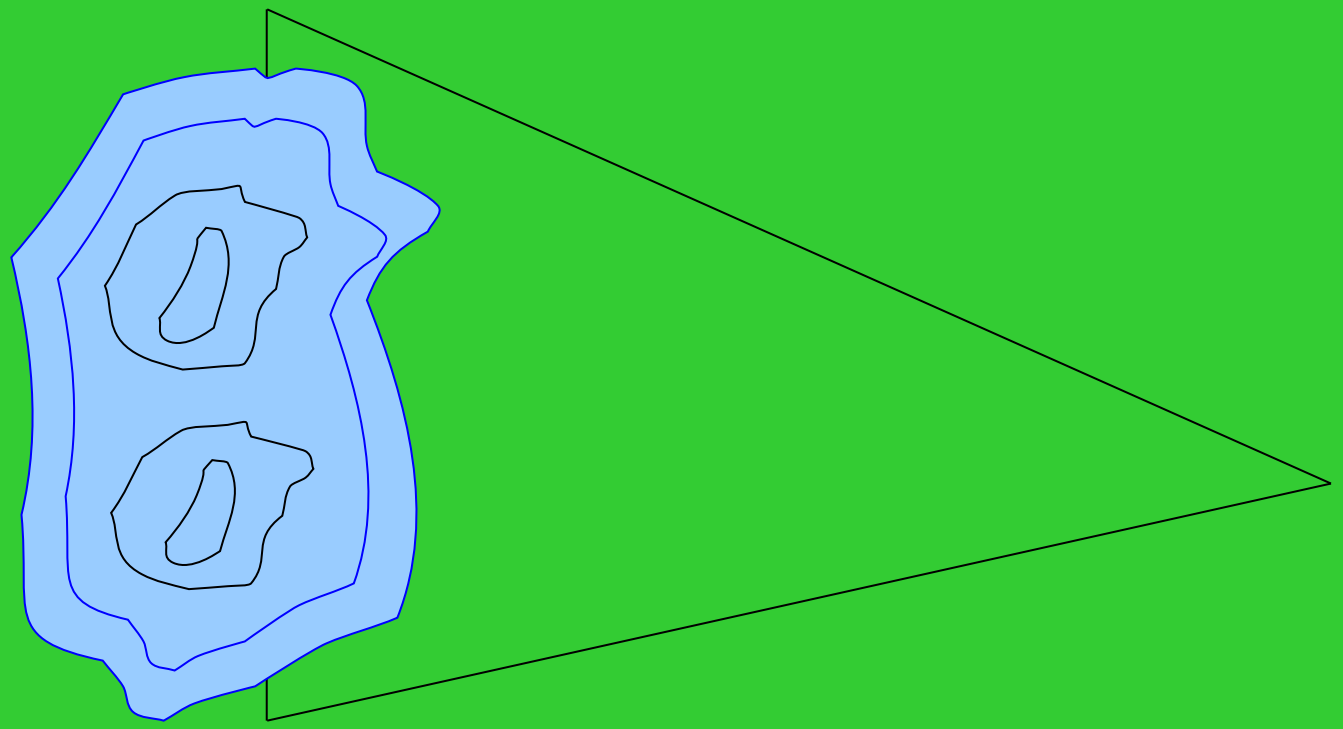
- **Відкриваючи вранці газету, ми часто читаємо повідомлення про черговий запуск штучного супутника Землі. Зазвичай у повідомленні вказують найменшу і найбільшу відстань супутника від поверхні Землі і період його обертань. Якщо сказано, що період обертання супутника складає 92 хвилини, то ми розуміємо, що його положення відносно Землі в якийсь момент часу і через кожні 92 хвилин з цього моменту буде однаковим. Так ми приходимо до поняття періодичної функції.**

ЗАСТОСУВАННЯ

ТРИГОНОМЕТРІЇ

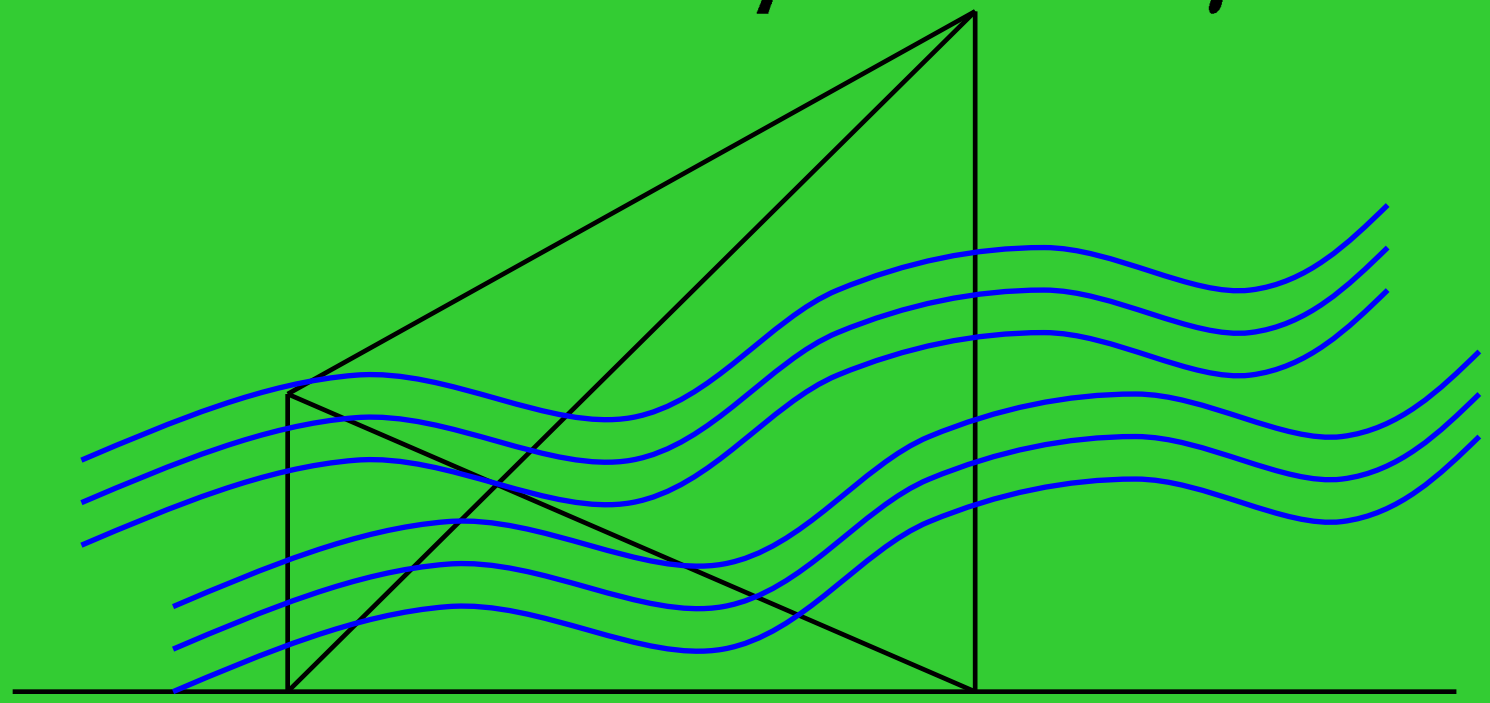
Теорема косинусів

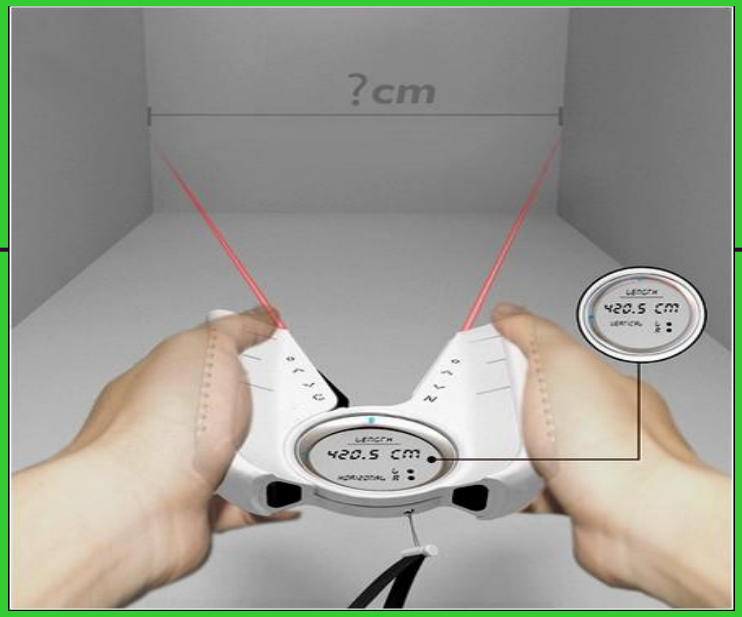
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

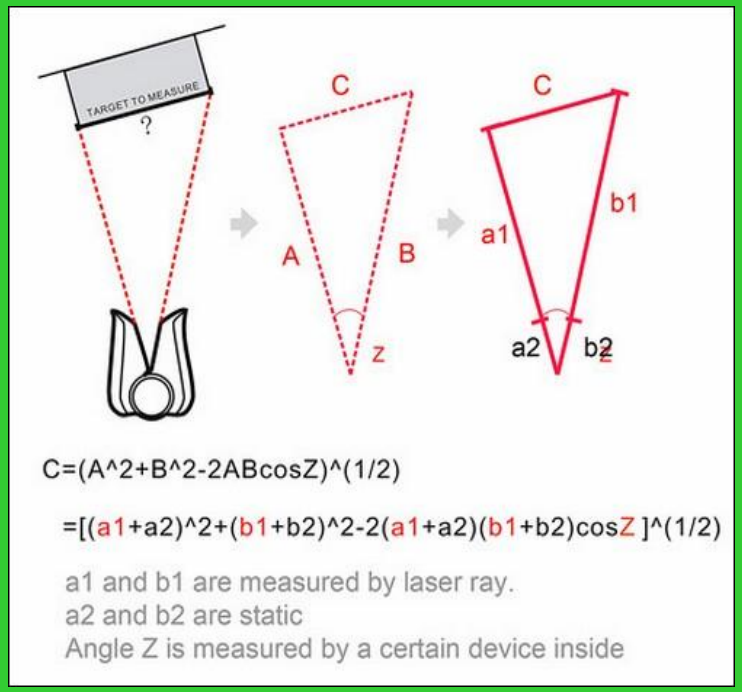


Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

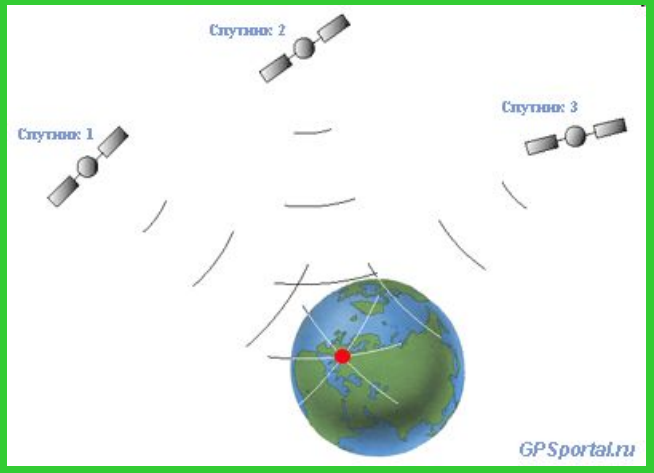


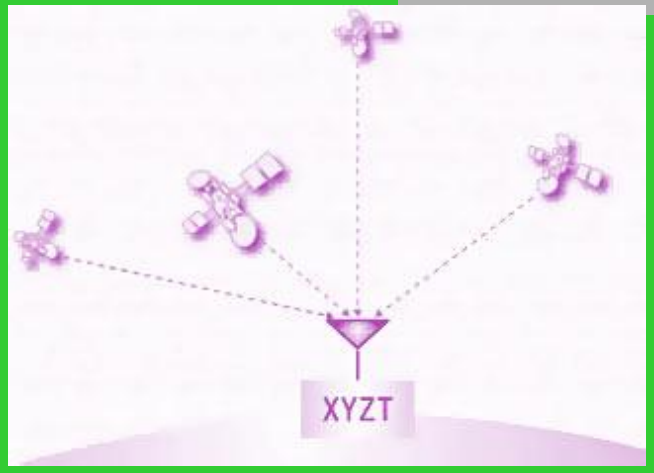




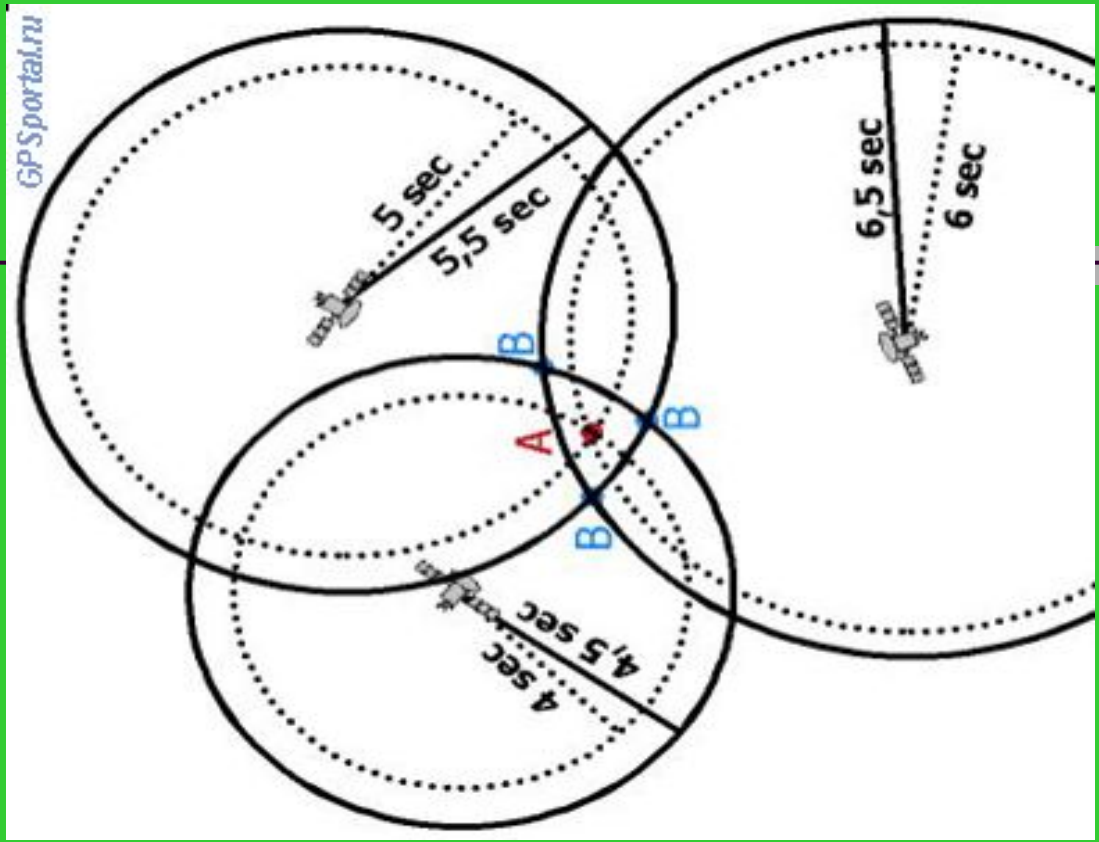
Безконтактний лазерний вимирювач відстані між двома точками (Red Point Measure)

Глобальна Навігаційнна Система (GPS)

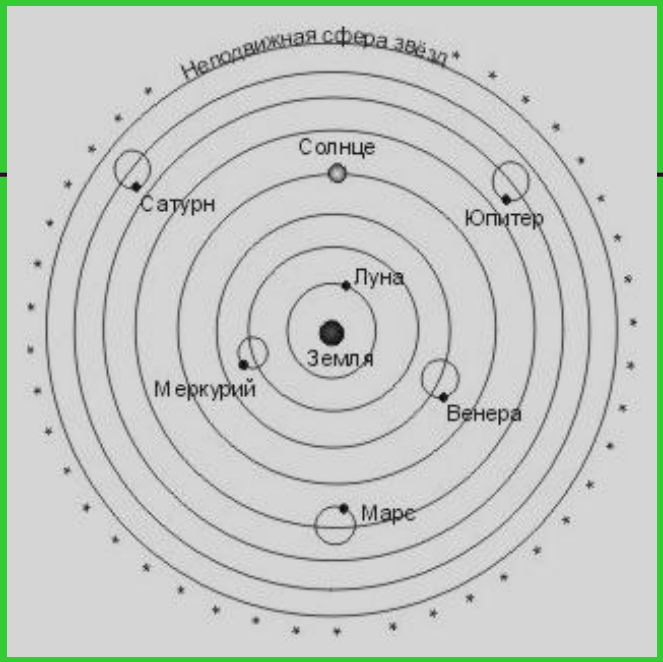




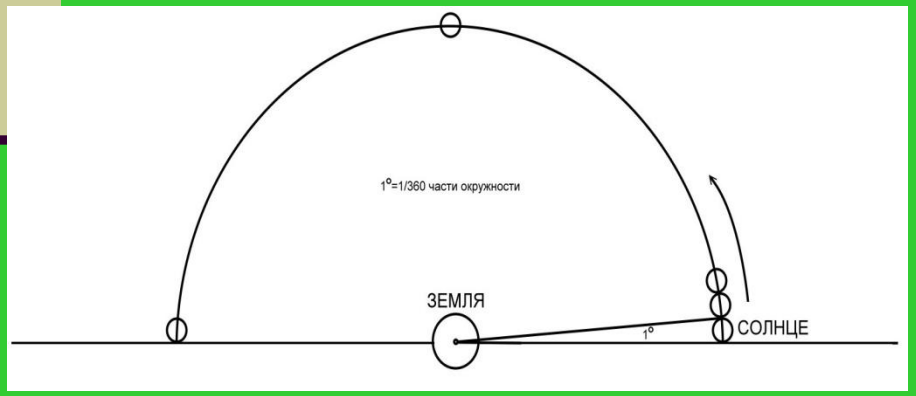
- Для визначення широти та довжини приймача необхідно, як мінімум, приймати сигнали від трьох супутників. Прийом сигналу від четвертого супутника позволяє визначити висоту об’єкта над поверхнею.



Комп’ютер приймача розв’язує чотири рівняння з чотирма невідомими до тих пір, поки не знайде рішення, яке проводить усі кола через одну точку.

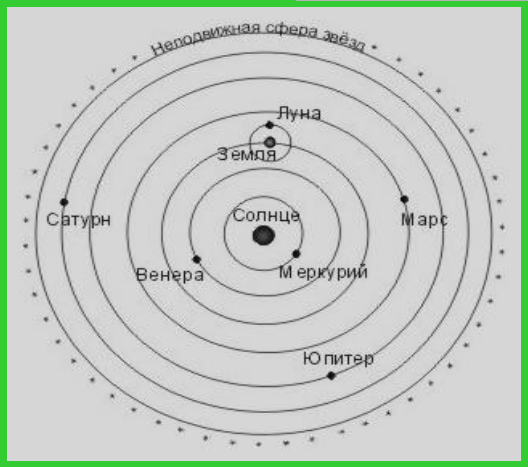


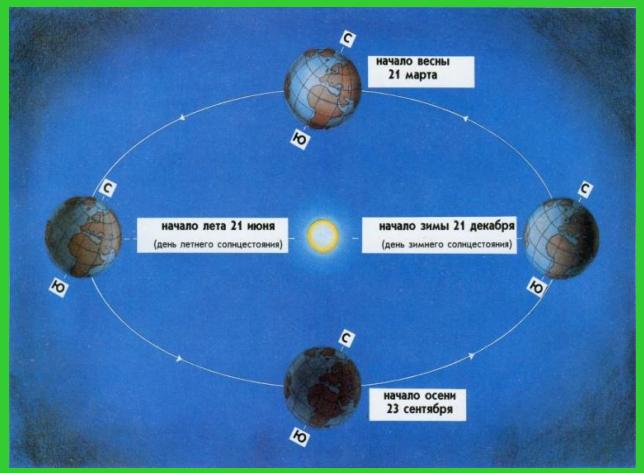
Геоцентрична система світу

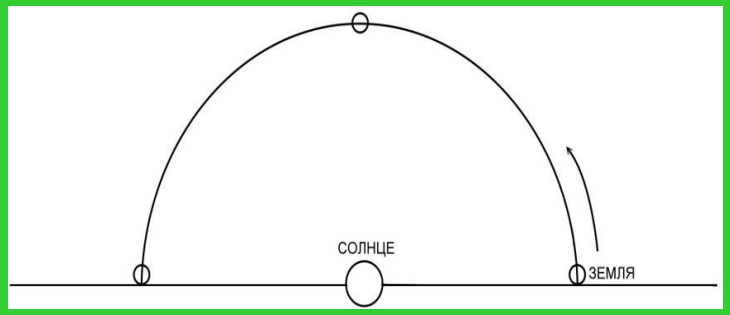


1 градус – слід Сонця

Геліоцентрична система світу Коперника







Опис гармонічних коливань

$$u(t) = U_m \sin \Omega t.$$

$$s(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \psi)$$

Додавання двох гармонічних коливань

$$A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

Розклад функції в ряд Фур'є

$$u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t),$$

$$t_0\le t\le t_1.$$

$$u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}\sin(k\omega_1 t+\psi k),$$

$$-\infty\ \square\ t\ \square\ +\infty.$$

Тригонометрична форма запису комплексного числа

$$Z = a + bi =$$

$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Формули Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Запис електричного сигналу

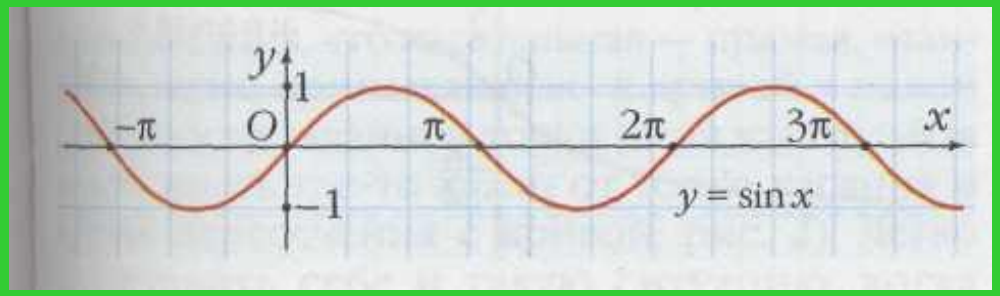
$$u(t) = U_0 + U_{m_1}\sin(\omega_1 t + \psi_1) +$$

$$+ U_{m_2}\sin(2\omega_1 t + \psi_2) + \ldots$$

$$+ U_{m_k}\sin(k\omega_1 t + \psi_k) + \ldots. =$$

$$= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{m_k}\sin(k\omega_1 t + \psi_k),$$

$$t_0 \le t \le t_1.$$



Об'єм циліндра можна обчислити за допомогою формули:

$$V = 4a^3 \sin\alpha \cos\alpha \cos 2\alpha$$

Цю формулу можна спростити?

Для налаштування фрезеровального станка на фрезерування муфти робітникові рекомендують використувати формулу

$$t = \frac{a \sin \alpha}{1 - \sin \alpha \cdot tg \frac{\alpha}{2}}$$

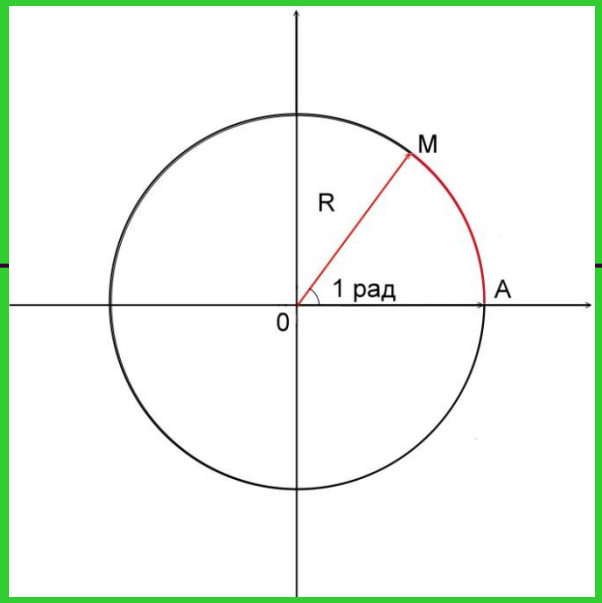
Рух поршня двигуна машини визначається за формулою:

$$S = R(1-\cos\varphi) + \frac{R^2(1-\cos^2\varphi)}{4l}$$

- Де *l* – довжина двигуна,
- R - радіус вала,
- φ - кут руху.

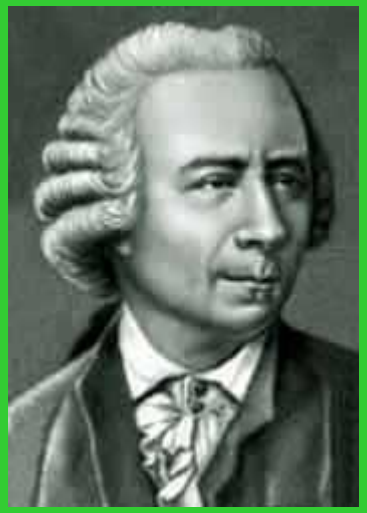
- Визначити рух поршня при *φ=π/2*, якщо *R=10см, l =32см.*

Назвіть ключові слова теми



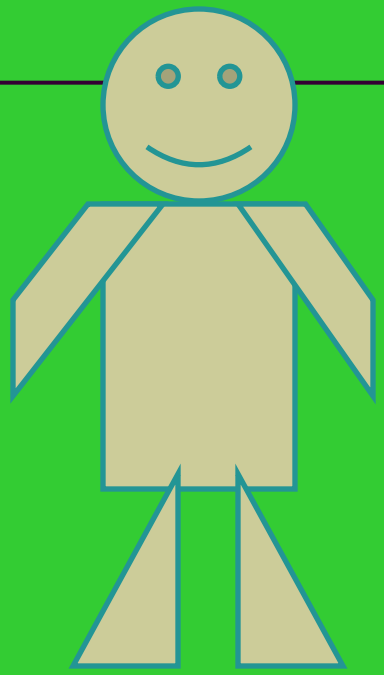
π рад = **180**град.

1 радіан наближено дорівнює 57 градусам.



Леонард Эйлер (1707-1783).

ТРИГОНОМЕТРІЯ



Сфери

- Астрономія
- Геодезія
- Картографія
- Механіка
- Оптика
- Акустика
- ……..
- ……..
- ……

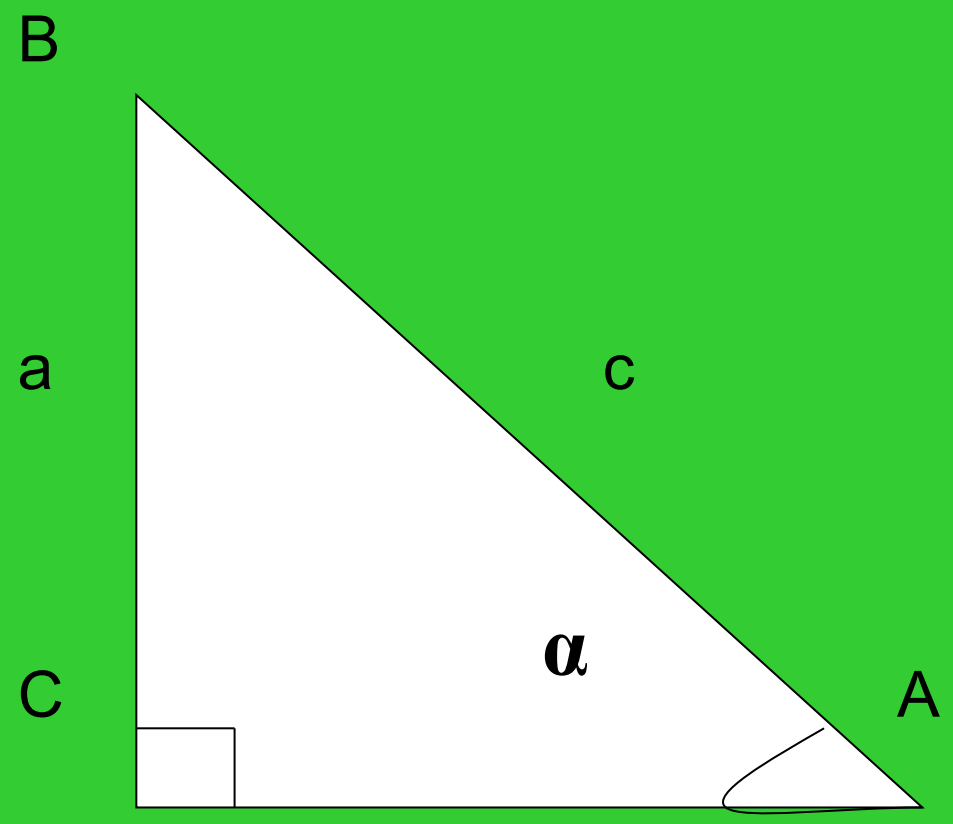
застосування

- Будівництво
- Архитектура
- Дизайн
- Навигація
- Медицина
- Музика
- Спорт
- ……
- ……

Назвіть ключові слова теми

Дайте визначення (1б)

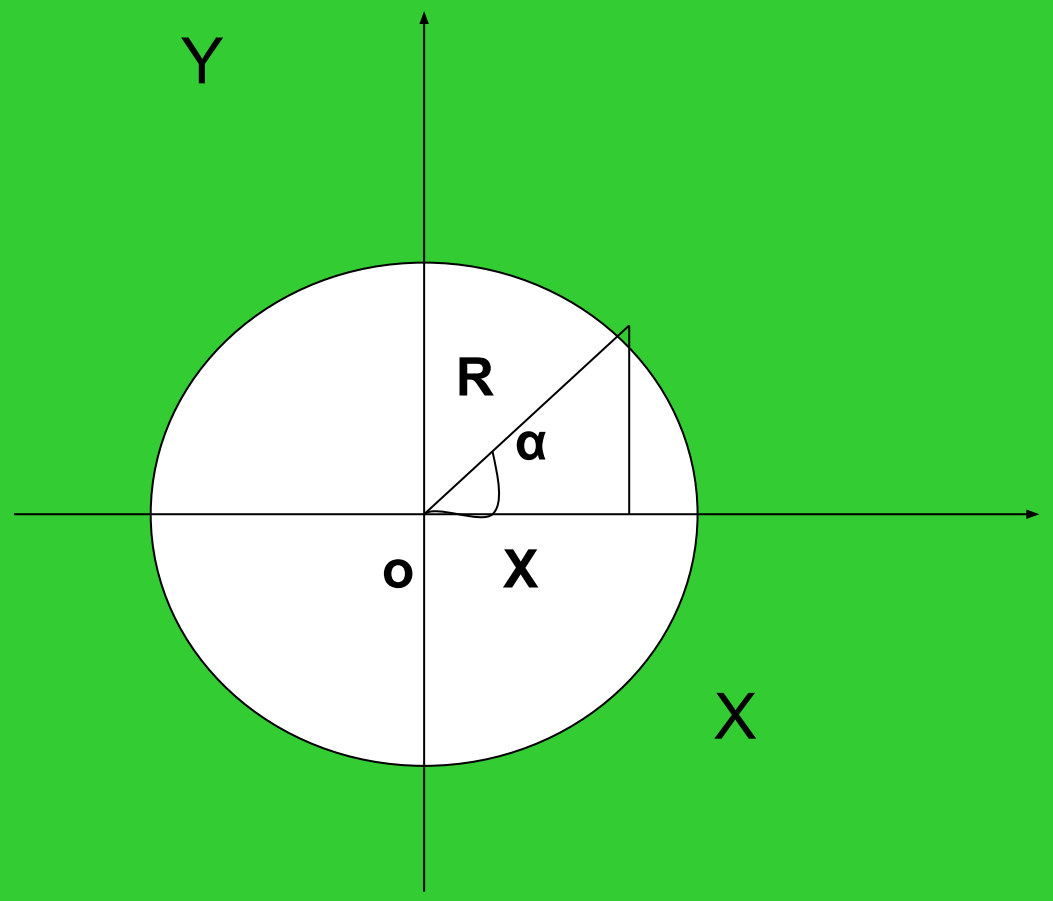
- **а) косинуса, синуса, тангенса, гострого кута в прямокутному трикутнику**



Дайте визначення (1б)

- б) косинуса, синуса, тангенса числового аргументу А (х,у)

- відношення;
- Х - абсциса;
- У - ордината;
- R - радіус.



За якими формулами переводять градусну міру кута в радіанну та навпаки?

За якими формулами переводять градусну міру кута в радіанну та навпаки?

- π рад = 180°
- 1 рад = $\frac{180^\circ}{\pi}$
- 1 рад = 57°

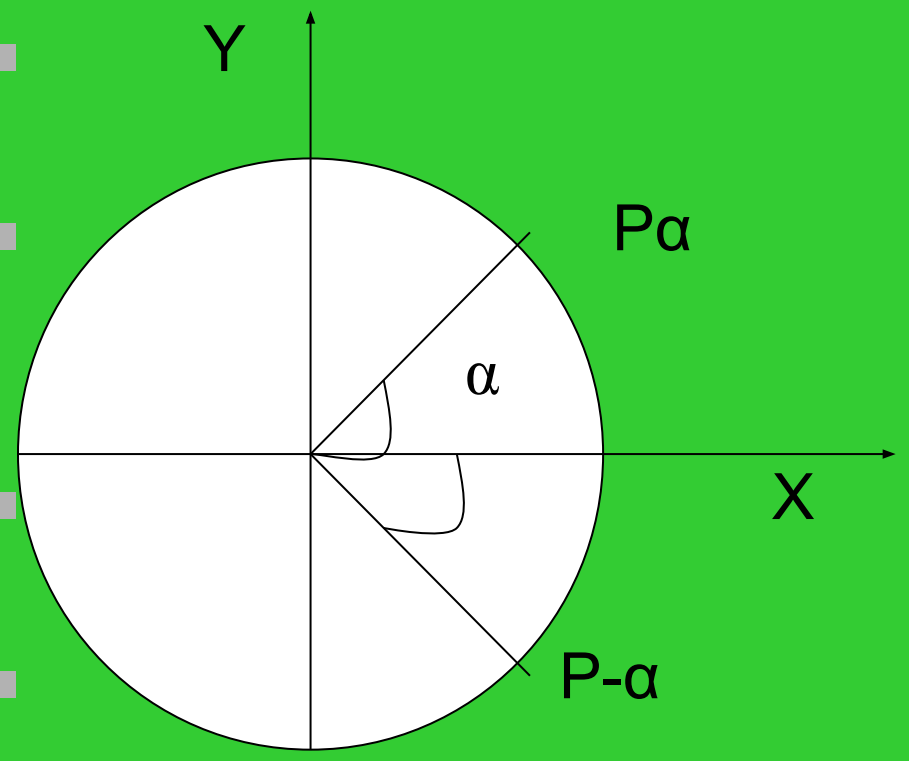
$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад

$90^\circ = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$

$60^\circ = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

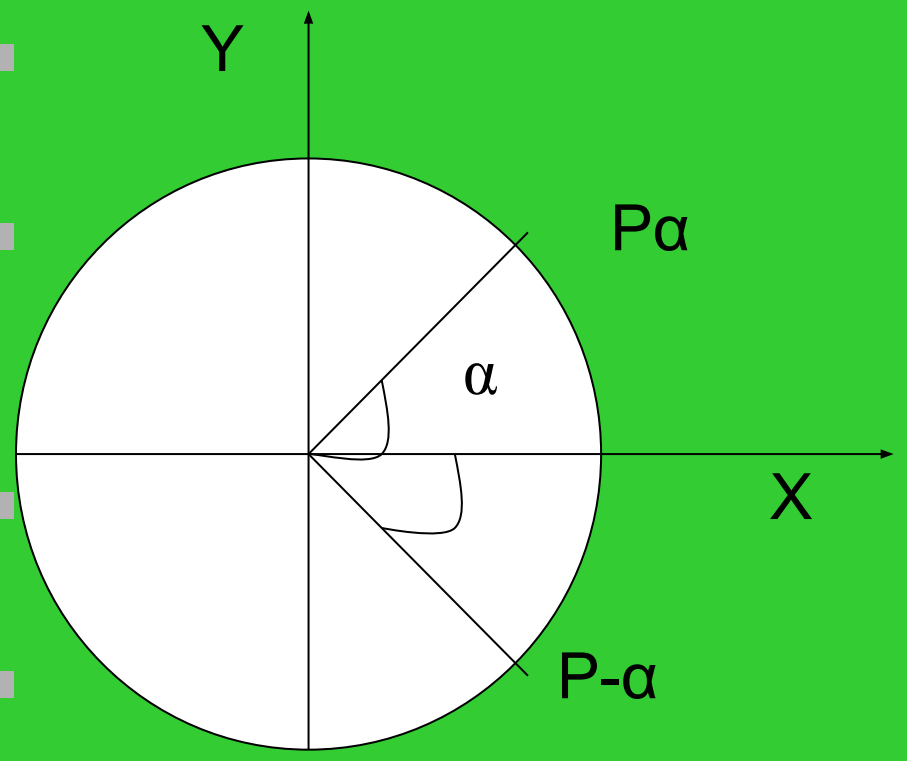
Які з тригонометричних функцій являються парними, а які непарними?

- cos (- α) =
- sin (- α) =
- tg (- α) =
- ctg (- α) =

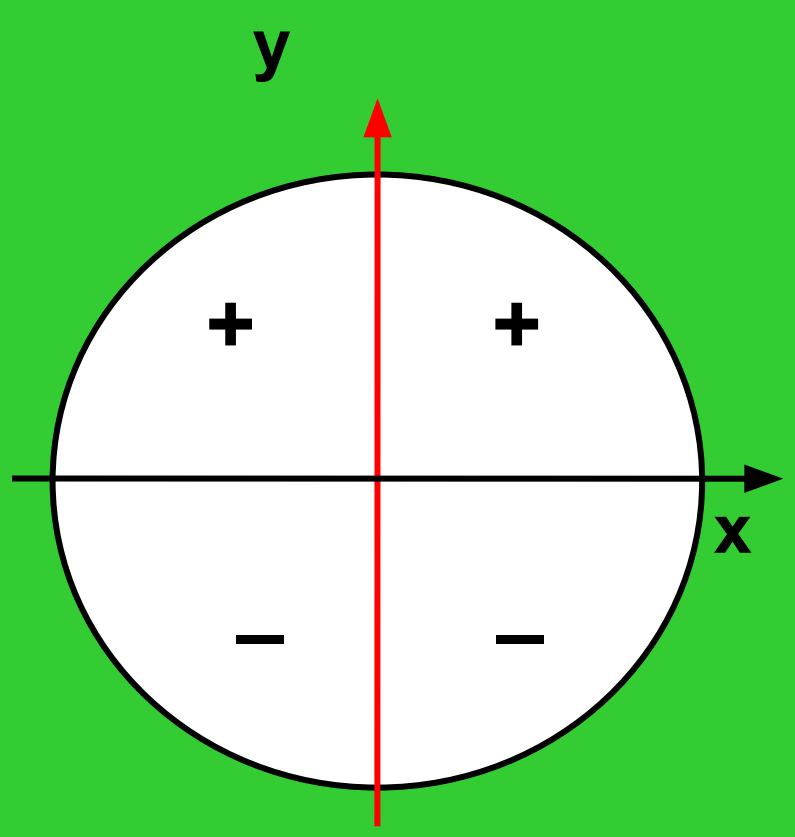


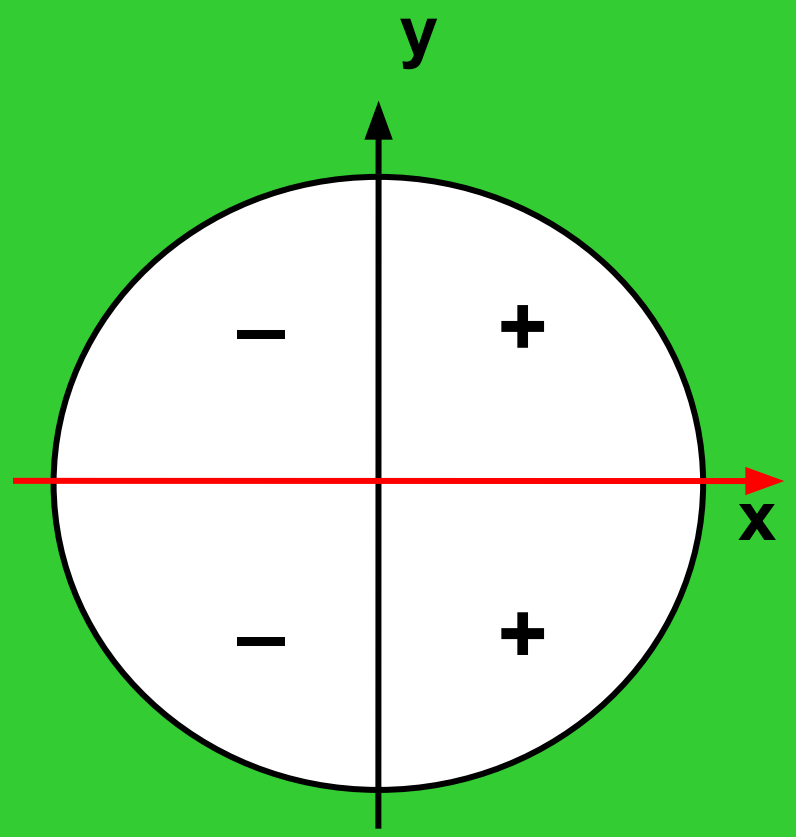
Які з тригонометричних функцій являються парними, а які непарними?

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$
- $ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$



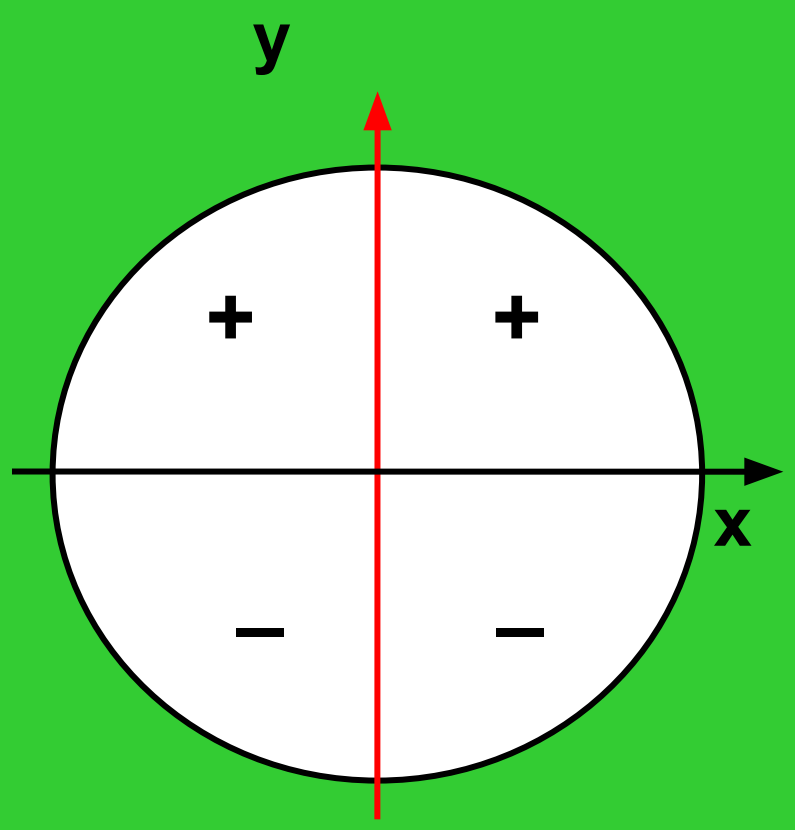
8. Згадаємо знаки тригонометричних функцій у координатних чвертях (1б)



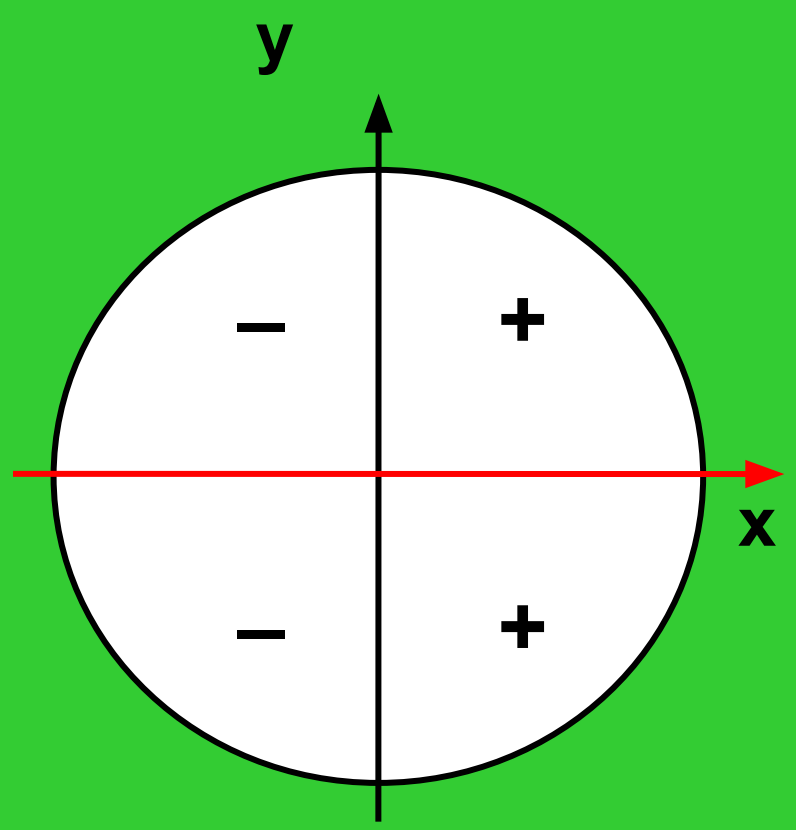


Згадаємо знаки тригонометричних функцій у координатних чвертях (1б)

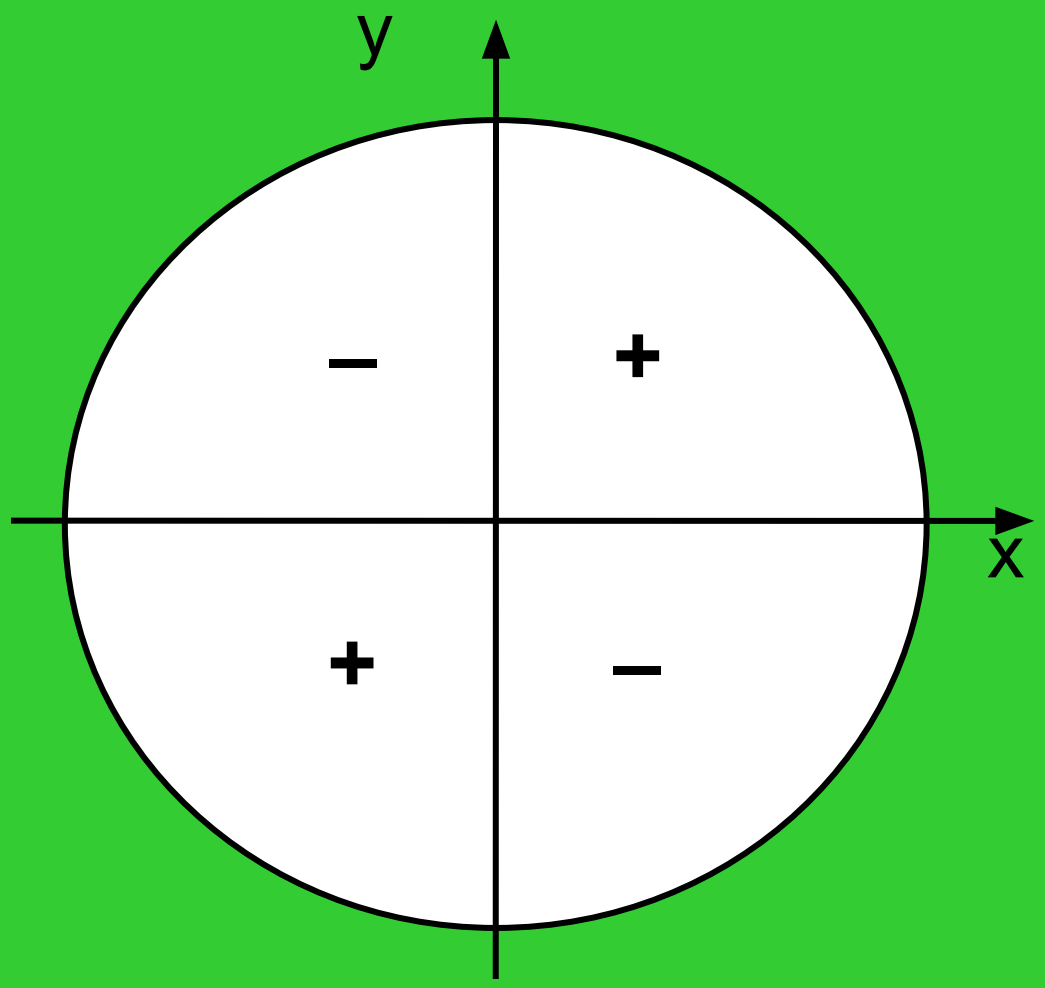
Sinα



Cosα

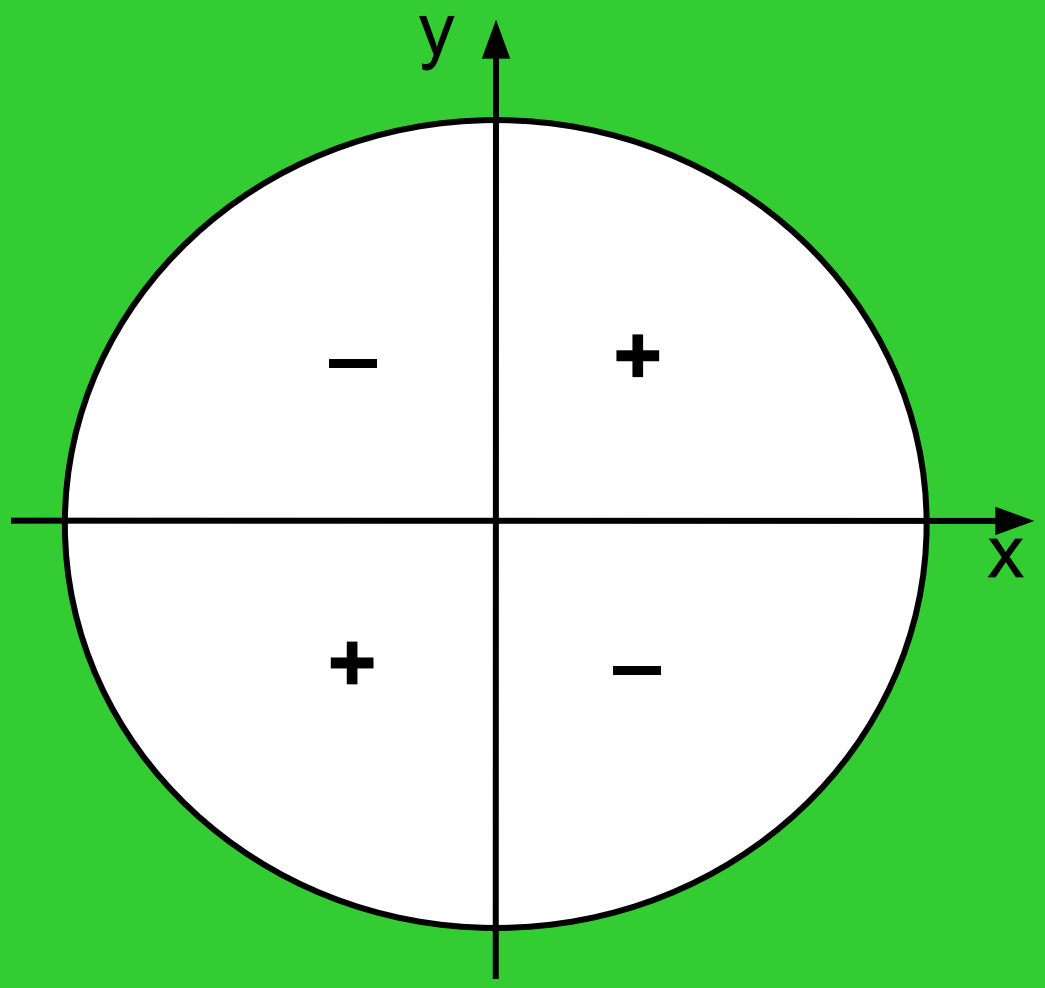


Згадаємо знаки тригонометричних функцій у координатних чвертях



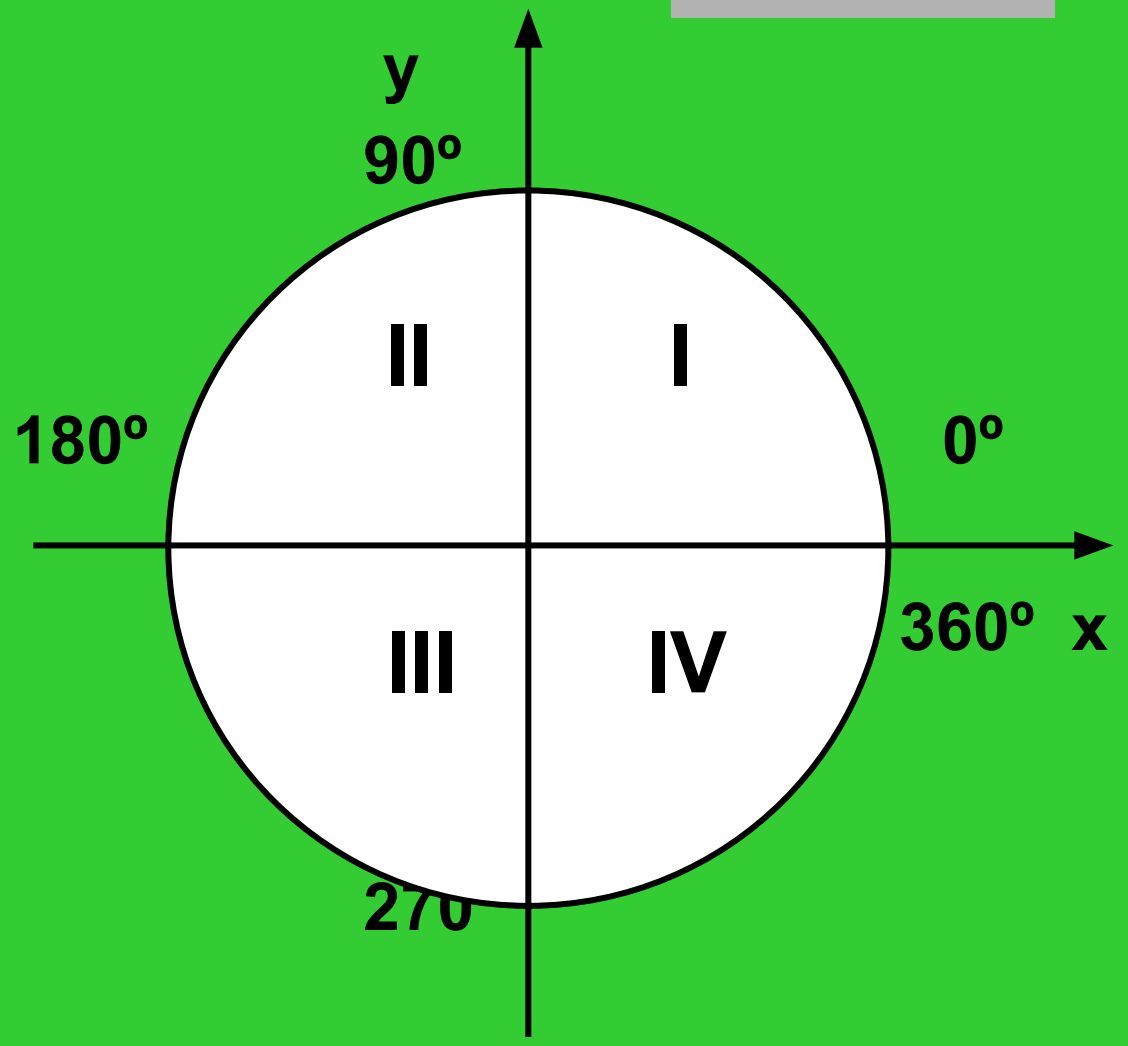
Згадаємо знаки тригонометричних функцій у координатних чвертях

- tgα, ctgα



Кутом якої чверті є кут, якщо:

- α= 95º
- α= 380º
- α= 300º
- α= -45º
- α= -245º



Яке число являється найменшим позитивним періодом

- а) синуса та косинуса
-
- б) тангенса та котангенса.
-

Яке число являється найменшим позитивним періодом

- а) синуса та косинуса
- $\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha$ $T = 2\pi$
- $\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha$
- $\cos(\alpha \pm 360^\circ) = \cos\alpha$ $T = 360^\circ$
- $\sin(\alpha \pm 360^\circ) = \sin\alpha$

- б) тангенса та котангенса.
- $tg(\alpha \pm \pi) = tg\,\alpha$ $T = \pi$
- $ctg(\alpha \pm \pi) = ctg\,\alpha$ $T = 180^\circ$

Обчислити

$$\cos 390^{\circ} = \cos(360^{\circ} + 30^{\circ}) = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Обчислити

$$\mathrm{ctg}\,570^\circ = \mathrm{ctg}(540^\circ + 30^\circ) = \mathrm{ctg}\,30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos 690^\circ = \cos(720^\circ - 30^\circ) = \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-420^\circ) = -\sin 420^\circ = -\sin(360^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Обчислити (2б.)

$$\sin 780^{\circ}$$

Обчислити

$$\sin 780^{\circ} = \sin(720^{\circ} + 60^{\circ})$$

Обчислити (2б.)

$$\sin 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

Обчислити

$$tg\,210^{\circ}$$

Обчислити

$$tg210^{\circ} = tg(180^{\circ} + 30^{\circ})$$

Обчислити (2б.)

$$= tg30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

№6. Обчислити усно

№1

$$12\cos 60^{\circ} - 4\sin 30^{\circ} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 - 2 = 4$$

$$18ctg60^{\circ} - 8\cos 30^{\circ} =$$

$$18ctg60^{\circ} - 8\cos 30^{\circ} = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$18ctg60^{\circ} - 8\cos 30^{\circ} = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$$

(2б.)

$$18ctg60^{\circ} - 8\cos 30^{\circ} = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$4\cos\pi - 6\sin\frac{\pi}{2} + 3tg\frac{\pi}{4} =$$

$$4\cos\pi - 6\sin\frac{\pi}{2} + 3tg\frac{\pi}{4} =$$

$$= 4\cdot(-1) - 6\cdot 1 + 3\cdot 1 =$$

$$= -4 - 6 + 3 = ?$$

(2б.)

-7

- **№6. Обчислити**

$$8ctg\frac{\pi}{4} - 5\sin\pi + 3tg0 =$$

- **№6. Обчислити**

$$8ctg\frac{\pi}{4}-5\sin\pi+3tg0=$$

$$=8\cdot1-5\cdot0+3\cdot0$$

(2б.)

- **№6. Обчислити**

8

Основні тригонометричні тотожності

Основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \alpha \in R$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$$

Основні тригонометричні тотожності

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z$$

Основні тригонометричні тотожності

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z$$

Знайти: (1б.)

$$ctg\alpha = \frac{5}{9}$$

$$tg\alpha - ?$$

$$tg\alpha = -\frac{7}{5}$$

$$ctg\alpha - ?$$

№ 1

$$\sin\alpha = \frac{24}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{25}$$

$$tg\alpha - ?$$

№ 1

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{24}{25} \div \frac{7}{25} = \frac{24}{25} \cdot \frac{25}{7} = \frac{24}{7}$$

№ 2

$$\sin\alpha = \frac{8}{17}$$

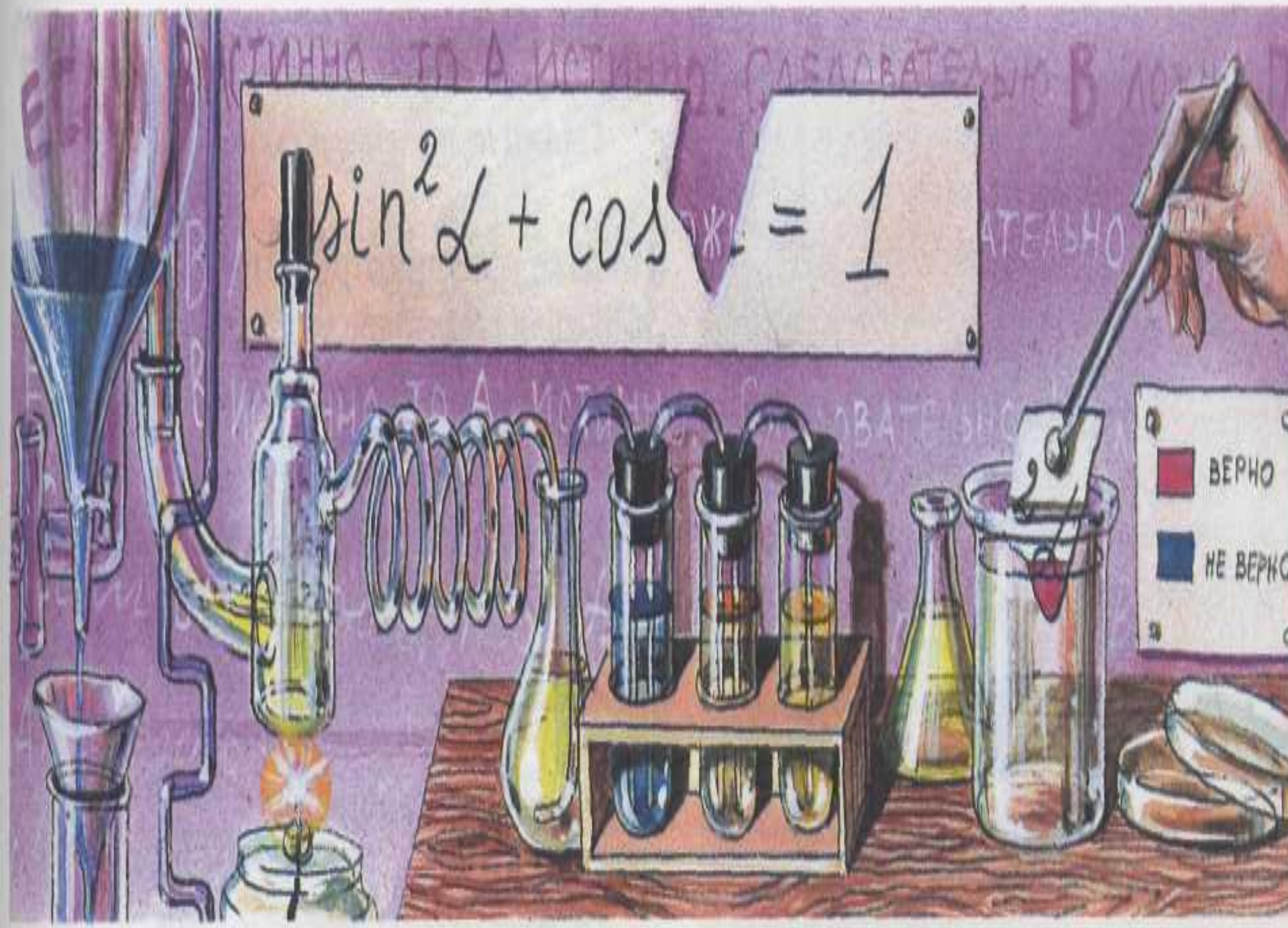
$$\cos\alpha = -\frac{15}{17}$$

$$ctg\alpha - ?$$

№ 2 (2б.)

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$ctg\alpha = -\frac{15}{17} \div \frac{8}{17} = -\frac{15}{17} \cdot \frac{17}{8} = -\frac{15}{8}$$


$\sin^2\alpha + \cos$
$= 1$
ВЕРНО
НЕ ВЕРНО

Разом (коментар)

Відомо, що $\sin\alpha = -\frac{5}{13}, -\pi\langle\alpha\langle\frac{3\pi}{2}$. Знайти cosα.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{12}{13}$$

$$\cos\alpha = -\frac{12}{13}$$

$\alpha \in$ IIIч

У дошки

Відомо, що $\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \frac{\pi}{2} \langle \alpha \langle \pi$. Знайти sinα.

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

Відомо, що $\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \frac{\pi}{2} \langle \alpha \langle \pi$. Знайти sinα.

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{169}$$

.

Відомо, що $\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \frac{\pi}{2} \langle \alpha \langle \pi$. Знайти sinα.

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{169-144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{25}{169}}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{5}{13}$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{13},$$ αєII чверті.

Спростити вирази

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha$$

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}$$

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}$$

$$\frac{\cos^5\alpha}{\sin^5\alpha}$$

Спростити вирази

$$\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}=3\mathrm{tg}\alpha$$

$$\frac{5\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{5\cos\alpha}{\sin\alpha}=5ctg\alpha$$

$$\frac{6\sin^2\alpha\cos^3\alpha}{\cos^5\alpha}=?$$

МАТЕМАЧТИЧНІ РОЗДУМИ

Спростити вирази

- $\sin\alpha + \sin\alpha = ?$

  $\cos\alpha + \cos\alpha = ?$

- $\sin\alpha - \sin\alpha = ?$

  $\cos\alpha - \cos\alpha = ?$

- $\sin\alpha \cdot \sin\alpha = ?$

  $\cos\alpha \cos\alpha = ?$

Обчислити $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 - \sin^2\alpha = ?$

$1 - \cos^2\alpha = ?$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha = ?$$

$$-7\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha = ?$$

$$-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = ?$$

$$6\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha - 4 = ?$$

Обчислити $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$1 + tg^2 5\alpha = \frac{1}{\cos^2 5\alpha}$$

$$1 + ctg^2 3\alpha = \frac{1}{\sin^2 3\alpha}$$

$$tg 7\alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\cos 7\alpha}$$

$$ctg 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Обчислити $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha = ?$$

$$3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = ?$$

$$\sin^2 4\alpha + \cos^2 4\alpha = ?$$

$$4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = ?$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = ?$$

$$\sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ = ?$$

$$\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = ?$$

$$\sin^2 170^\circ + \cos^2 170^\circ = ?$$

Обчислити. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$$4tg\alpha \cdot ctg\alpha = ?$$

$$tg4\alpha \cdot ctg4\alpha = ?$$

$$6tg20^{\circ} \cdot ctg20^{\circ} = ?$$

$$7tg5\alpha \cdot ctg5\alpha = ?$$

Чи можуть синус та косинус одного й того ж числа бути рівними відповідно:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$$

$$а)\ \sin\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = 1$$

$$б)\ \sin\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = 0$$

$$в)\ \sin\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = 1$$

Чи можуть тангенс та котангенс одного й того ж числа бути рівними відповідно:

$$(\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1)$$

$$а)\, tg\alpha = \frac{3}{5}$$

$$ctg\alpha = \frac{5}{3}$$

$$в)\, tg\alpha = -24$$

$$ctg\alpha = \frac{5}{12}$$

$$б)\, tg\alpha = 2$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{2}$$

2бали

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\alpha =$$

Спростити вираз.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\alpha =$$

$$= 1 + tg^2\alpha =$$

Спростити вирази **2бали**

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Спростити вираз. (2бали)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\alpha =$$

$$= 1 + tg^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Спростити.
№2 Відповідь студентів. (2бали)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + ctg^2\alpha =$$

Спростити. Відповідь студентів.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + ctg^2\alpha =$$

$$= 1 + ctg^2\alpha =$$

Спростити вираз. **2бали**

$$= \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Спростити вираз.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + ctg^2\alpha =$$

$$= 1 + ctg^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Спростити вираз. Коментар.

$$\left(\sin^2\alpha - 1\right)\cdot tg^2\alpha =$$

$$= -\cos^2\alpha \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= -\sin^2\alpha$$

Спростити у дошки. Відповіді студентів. (3 бали)

$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$$

Спростити. Відповіді студентів.

$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha =$$

Спростити. Відповіді студентів

$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha \cdot 1 + \cos^2\alpha$$

Повний коментар. (3бали)

$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha \cdot 1 + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Спростити вирази (2бали)

$$(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$$

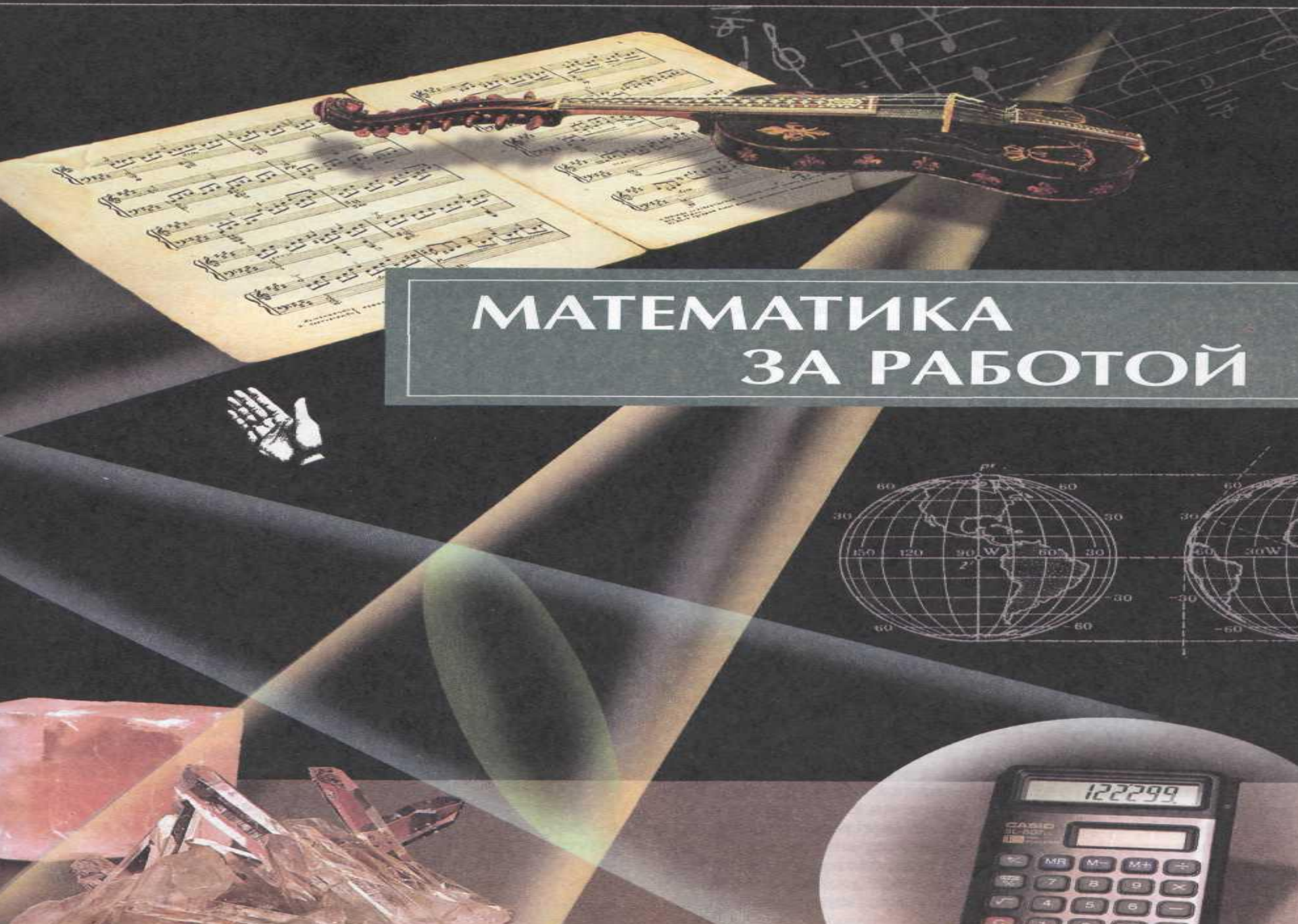
Спростити вирази

$$1-\cos^2\alpha$$

Спростити вирази

$$\sin^2 \alpha$$

МАТЕМАТИКА ЗА РАБОТОЙ



Спростити. Коментар. (4бали)

$$\cos^4\beta - \sin^4\beta + 2\sin^2\beta =$$

$$= \left(\cos^2\beta - \sin^2\beta\right)\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) + 2\sin^2\beta =$$

$$= \cos^2\beta - \sin^2\beta + 2\sin^2\beta = 1$$

Спростити.
Записати у зошиті. (3бали)

$$\sin^4\beta - \cos^4\beta + 2\cos^2\beta$$

Спростити.

$$\sin^4\beta - \cos^4\beta + 2\cos^2\beta =$$

$$= \left(\sin^2\beta - \cos^2\beta\right)\cdot\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + 2\cos^2\beta =$$

Спростити :

$$\sin^4\beta - \cos^4\beta + 2\cos^2\beta =$$

$$= \left(\sin^2\beta - \cos^2\beta\right)\cdot\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + 2\cos^2\beta =$$

$$= \sin^2\beta - \cos^2\beta + 2\cos^2\beta =$$

Спростити :

$$\sin^4\beta - \cos^4\beta + 2\cos^2\beta =$$

$$= \left(\sin^2\beta - \cos^2\beta\right)\cdot\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + 2\cos^2\beta =$$

$$= \sin^2\beta - \cos^2\beta + 2\cos^2\beta =$$

$$= \sin^2\beta + \cos^2\beta$$

Спростити : (4бали)

$$\sin^4\beta - \cos^4\beta + 2\cos^2\beta =$$

$$= \left(\sin^2\beta - \cos^2\beta\right)\cdot\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + 2\cos^2\beta =$$

$$= \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

Спростити вираз:

$$tg\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$$

$$ctg\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$$

$$tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = ?$$

$$ctg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = ?$$

Спростити.
Усний коментар.(2бали)

$$\left(\sin^2\alpha + ctg^2\alpha\sin^2\alpha\right)tg\alpha$$

Спростити.
Усний коментар.(2бали)

$$\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\cdot tg\alpha$$

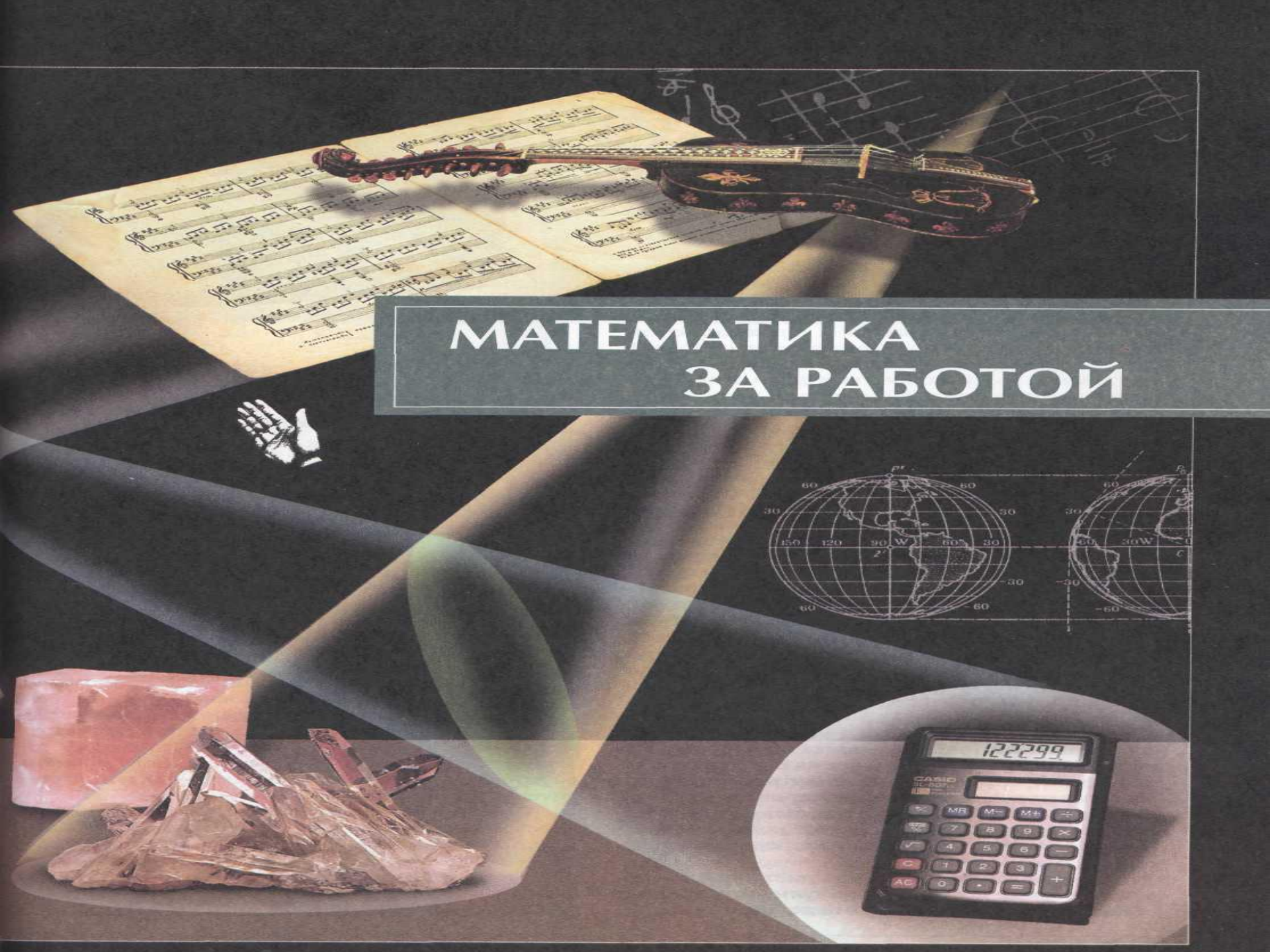
Спростити.
Усний коментар.(2бали) :

$$tg\alpha$$

Спростити.
Усний коментар.(2бали).

$$\left(\sin^2\alpha + ctg^2\alpha\sin^2\alpha\right)tg\alpha =$$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\cdot tg\alpha = tg\alpha$$



МАТЕМАТИКА ЗА РАБОТОЙ

Довести тотожність: (3 бали) Відповідь студента у дошки.

1. $tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

Довести тотожність: (3 бали) Відповідь студента у екрана.

1. $tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

Довести тотожність: (3 бали) Відповідь студента у дошки.

1. $tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$$

Довести тотожність: (3 бали) (самостійно у зошитах)

2. $ctg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

Довести тотожність: (3 бали) Відповідь

2. $$ctg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

Довести тотожність: (3 бали) Відповідь

2. $$ctg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \cos^2\alpha$$

№3. Довести тотожність: (5 бал.) Відповідь студента у дошки.

$$tg(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)=-2\sin\alpha$$

№3. Довести тотожність: (5 бал.)

$$tg(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)=-2\sin\alpha$$

$$-tg\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

№3.Довести тотожність: (5 бал.)

$$tg(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)=-2\sin\alpha$$

$$-tg\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

№3.Довести тотожність: (5 бал.)

$$tg(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)=-2\sin\alpha$$

$$-tg\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sin$$

$$-\sin\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

№3.Довести тотожність: (5 бал.)

$$tg(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)=-2\sin\alpha$$

$$-tg\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

$$-\sin\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

$$-2\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

Довести тотожність: (5 бал.) Відповідь студента у дошки.

5. $\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right) \cdot ctg\alpha = ctg\alpha$

Довести тотожність: (5 бал.)
Відповідь студента у екрана.

5. $$\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\cos^2\alpha\left(1 + tg^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

Довести тотожність: (5 бал.)
Відповідь студента у екрана.

5. $$\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\cos^2\alpha\left(1 + tg^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\cos^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

Довести тотожність: (5 бал.)
Відповідь студента у екрана.

5. $$\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\cos^2\alpha\left(1 + tg^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\cos^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$ctg\alpha = ctg\alpha$$

Довести тотожність: (5 бал.) Відповідь студента у екрана.

4. $$\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right) \cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

Довести тотожність: (5 бал.) Відповідь студента у екрана.

4. $$\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

Довести тотожність: (5 бал.)
Відповідь студента у екрана.

4. $$\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$1\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

Довести тотожність: (5 бал.)
Відповідь студента у екрана.

4. $$\left(\cos^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$1\cdot ctg\alpha = ctg\alpha$$

$$ctg\alpha = ctg\alpha$$

Рух поршня двигуна машини визначається за формулою (Робота у дошки (4б)):

$$S = R(1-\cos\varphi) + \frac{R^2(1-\cos^2\varphi)}{4l}$$

- де l – довжина шатуна,
- R - радіус вала,
- φ - кут руху.

Визначити рух поршня при φ=π/2, якщо R=10см, l=25см.

Рух поршня двигуна машини визначається за формулою:

$$S = 10\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) + \frac{10^2\left(1 - \cos^2\frac{\pi}{2}\right)}{4 \cdot 25}$$

Рух поршня двигуна машини визначається за формулою:

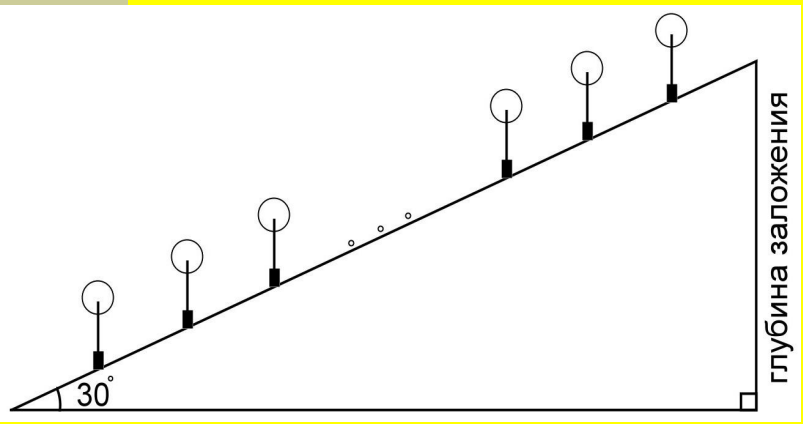
$$S = 10(1 - \cos\frac{\pi}{2}) + \frac{10^2(1 - \cos^2\frac{\pi}{2})}{4 \cdot 25} =$$

$$= 10(1 - 0) + \frac{100(1 - 0)}{100}$$

Рух поршня двигуна машини визначається за формулою:

$$S = 10(1 - \cos\frac{\pi}{2}) + \frac{10^2(1 - \cos^2\frac{\pi}{2})}{4 \cdot 25} =$$

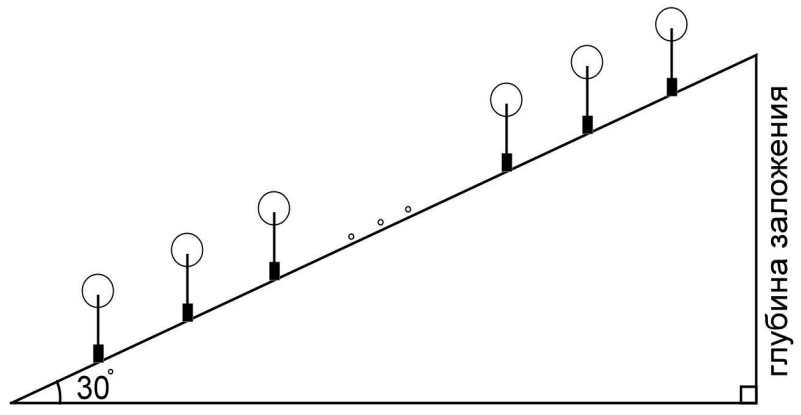
$$= 10(1 - 0) + \frac{100(1 - 0)}{100} = 10 + 1 = 11(см)$$



Кут нахилу всіх ескалаторів київського метро дорівнює 30 градусам. Зная це, кількість ламп на эскалаторі і наближену відстань між лампами (6 м), можна обчислити наближену глибину закладання станції.

Розв’язування

1.



«Арсенальна»- сама глубока в світі станція метро

35 відрізків ·6 метрів =210 метров –довжина сходів.

210 : 2 = 105,5 (м) – глубина закладання станції.

(Офіційні дані – 105,5 м)

«Крещатик» - 22 відрізка.

3. «Майдан» - 25 відрізків.

Розв’язування (2 бали)

2.«Крещатик»

22 відрізка ·6 метрів =132 метра –довжина сходів.

132 : 2 = 66 (м) – глибина закладання станції.

(Офіційні дані – 67 м)

3.«Майдан»

25 відрізків ·6 метрів =150метрів –довжина сходів.

150 : 2 = 75 (м) – глибина закладання станції.

(Офіційні дані – 75 м)

САМОСТІЙНА РОБОТА

(тестовий контроль)

Відповіді

1 варіант

1. В
2. Б
3. Б
4. В
5. Б
6. Г
7. А
8. Б
9. А
10. Б
11. В
12. А

2 варіант

1. Г
2. Б
3. Б
4. Б
5. В
6. Б
7. Г
8. Б
9. А
10. В
11. А
12. Б

Домашнє завдання:

1. Повторити формули.
2. Виконати домашнє завдання (індивідуальну картку) на окремих листах.
3. Робота з опорним конспектом.

Набрана сума балів	Бали за 12-бальною системою
28-30	12
24 -27	11
20 -23	10
17-19	9
15-16	8
13-14	7
11-12	6
9-10	5
7-8	4
5-6	3

Підсумок

заняття

Математика... выявляет порядок, симметрию и определённость, а это — важнейшие виды прекрасного.

Аристотель

Софья Ковалевська:

«Серед усіх наук,
що відкривають людству шлях
до пізнання законів природи,
наймогутніша й найвеличніша
наука – математика»