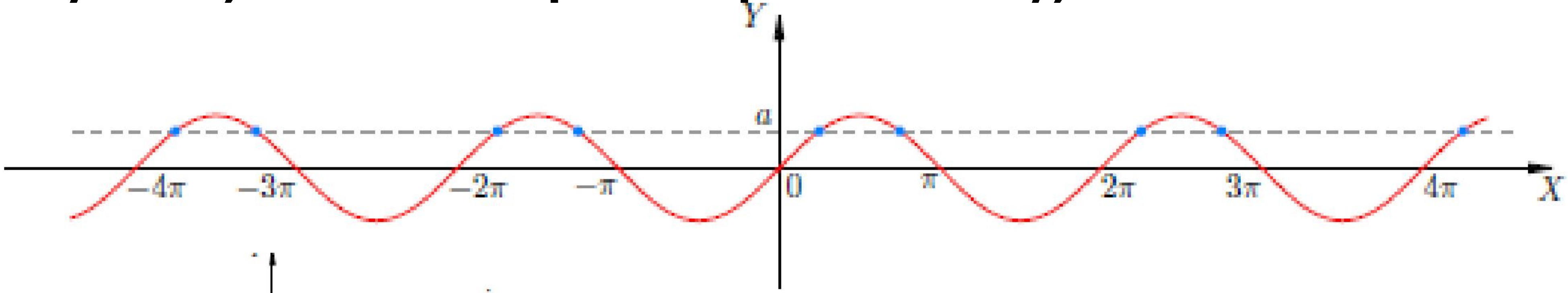
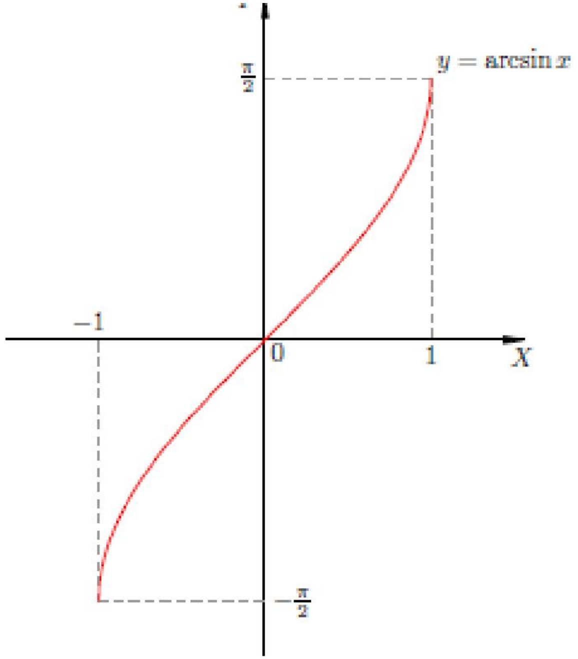
Обратные тригонометрические функции.

Арксинус

Арккосинус

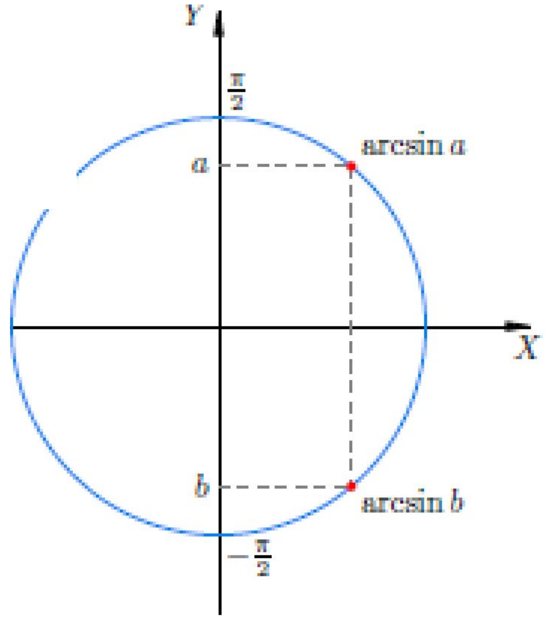
Арксинус (обозначение: *arcsin x*; *arcsin x* — это угол, *sin* которого равен *x*),



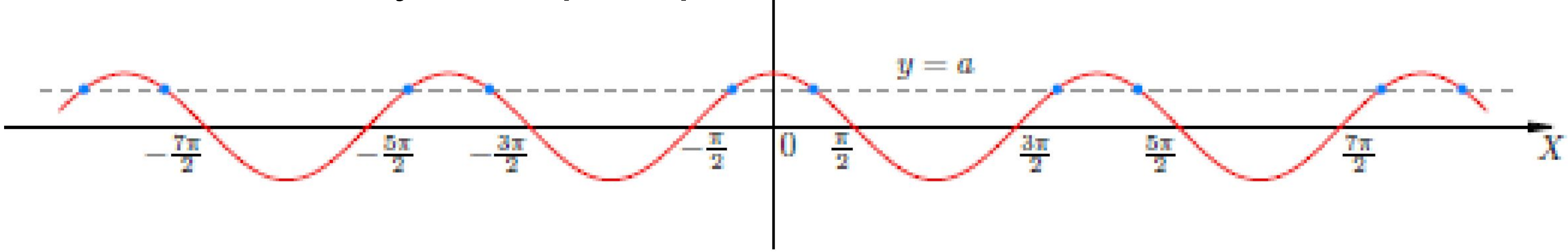


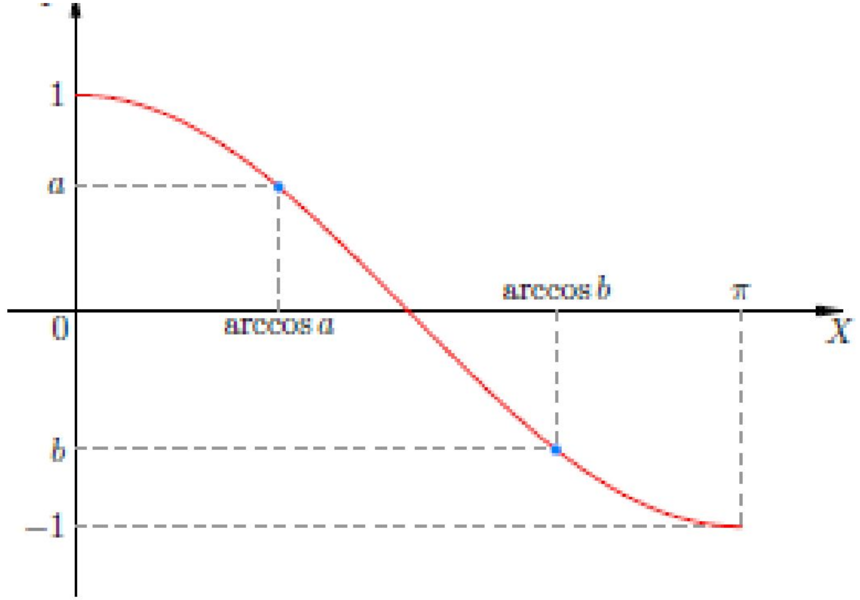
$$x = \arcsin a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a, \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

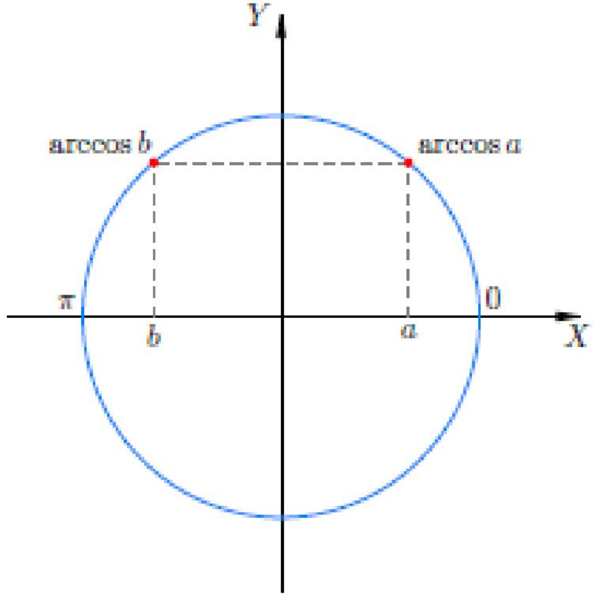
$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x, \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$



Арккосинус(обозначение: *arccos x*; *arccos x* — это угол, косинус которого равняется *x* и так далее),







$$x = \arccos a \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a, \\ x \in [0; \pi]. \end{cases} \qquad y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x, \\ y \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Связь между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Формулы, связывающие обратные тригонометрические функции.

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\arcsin(\sin x) = x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin x) = x$

$\arccos(\cos x) = x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$\cos(\arccos x) = x$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ при $0 < x < \pi$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$

Арксинус (*y = arcsin x*) – обратная функция к *sin* (*x = sin y*), которая имеет область определения и множество значений . Другими словами возвращает угол по значению его *sin*.
Арккосинус (*y = arccos x*) – обратная функция к *cos* (*x = cos y*), которая имеет область определения и множество значений . Другими словами возвращает угол по значению его *cos*.
Арктангенс (*y = arctg x*) – обратная функция к *tg* (*x = tg y*), которая имеет область определения и множество значений . Другими словами возвращает угол по значению его *tg*.
Арккотангенс (*y = arcctg x*) – обратная функция к *ctg* (*x = ctg y*), которая имеет область определения и множество значений . Другими словами возвращает угол по значению его ctg

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$0 < y < \pi$$

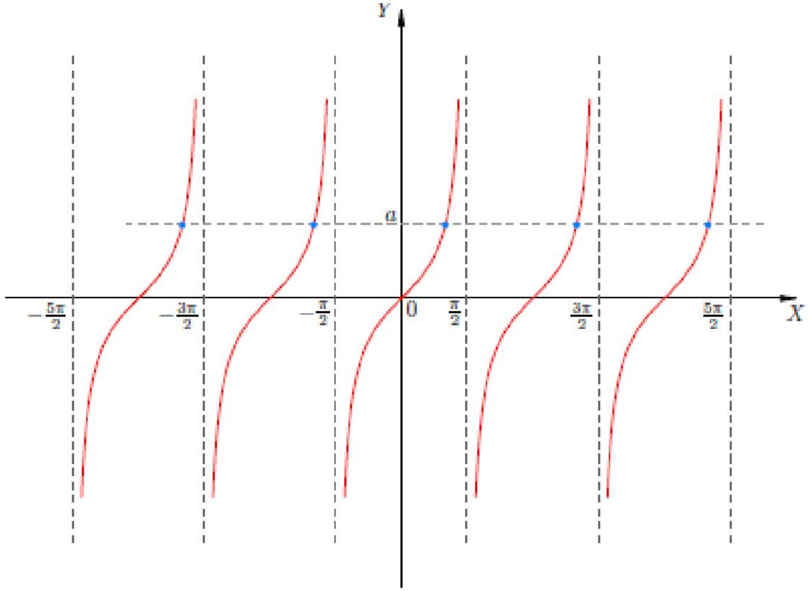
$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

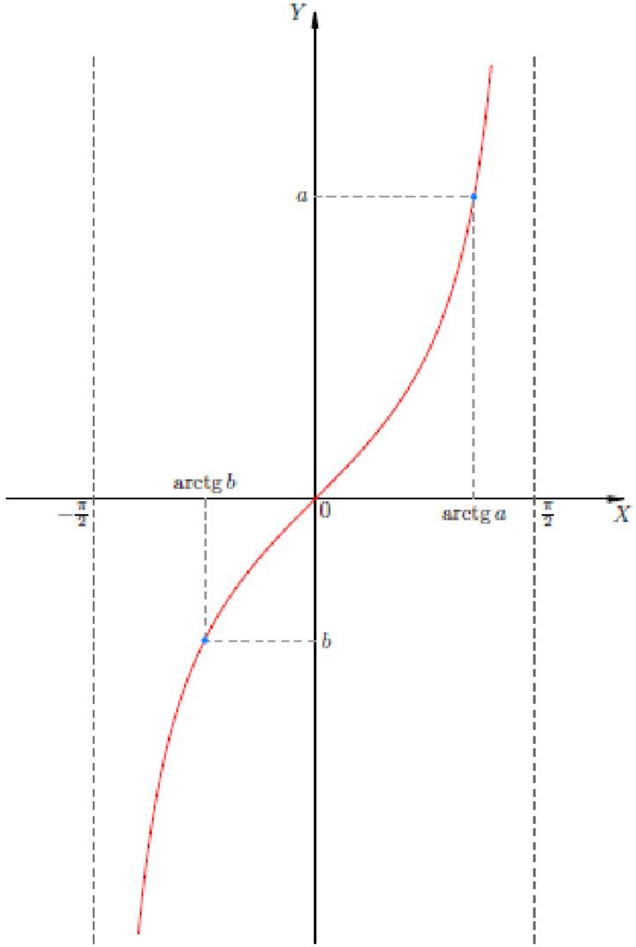
$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leqslant y \leqslant \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

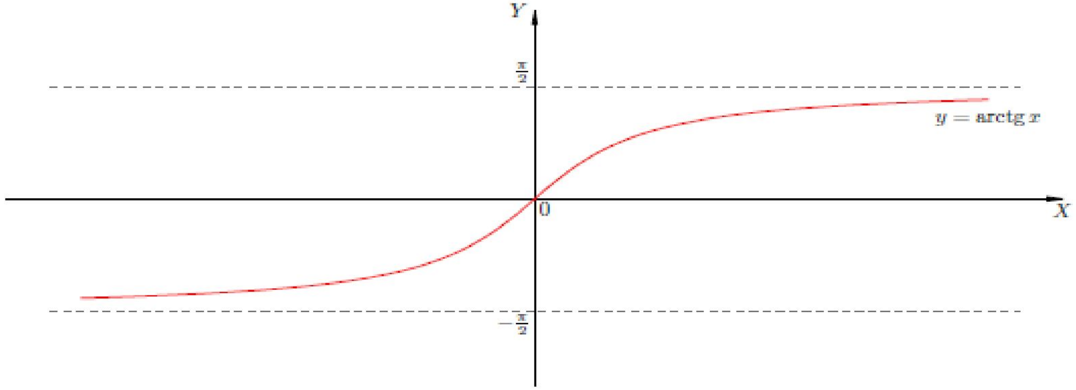
Арктангенс





- *Областью определения функции* $y = \operatorname{arctg} x$ *является множество* $\mathbb{R}$ *всех действительных чисел.* Это следует из соотношения $x = \operatorname{tg} y$ и того факта, что $\operatorname{tg} y$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ пробегает всё множество $\mathbb{R}$.

- *Областью значений функции* $y = \operatorname{arctg} x$ *является интервал* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Смотрите вторую строку в определении (9).



$$x = \operatorname{arctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = x, \\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Пример. Чему равен $\arcsin\frac{1}{2}$? Поскольку $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, имеем $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. Конечно, существует много других углов, для которых синус равен $\frac{1}{2}$ (таковы, например, $\frac{5\pi}{6}$ или $-\frac{7\pi}{6}$). Но только один из этих углов — а именно, $\frac{\pi}{6}$ — принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Этот же результат сразу следует из нечётности арксинуса: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$.

Пример. $\sin(\arcsin 0{,}7)=0{,}7$. Это сразу следует из определения арксинуса; ведь $\arcsin 0{,}7$ — это угол, синус которого равен 0,7.

Вообще, $\sin(\arcsin a)=a$ для всех $a\in[-1;1]$. Иначе говоря, если взять синус от арксинуса, то мы непременно вернёмся к исходному числу.

Пример. Верно ли, что $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$? Вообще говоря, нет. А именно, если $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то данное равенство будет верным, например:

$$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Но если $\alpha\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то данное равенство окажется неверным. Смотрите:

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\neq\frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, арксинус от синуса не обязательно вернёт нас к исходному числу.

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

Пример. $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$.

Пример. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, поскольку $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$.

Как видим, соотношение (6) выполнено: $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, то есть $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}$.

Пример. Для любого $a\in[-1;1]$ справедливо равенство $\cos(\arccos a)=a$. Это прямо следует из определения арккосинуса — ведь $\arccos a$ есть угол, косинус которого равен a. Таким образом, косинус от арккосинуса непременно возвращает нас к исходному числу.

Пример. А вот взятие арккосинуса от косинуса не обязательно даст исходное число; иными словами, равенство $\arccos(\cos\alpha)=\alpha$, вообще говоря, не верно.

Если $\alpha\in[0;\pi]$, до данное равенство выполнено. Например:

$$\arccos\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Но если $\alpha\notin[0;\pi]$, то равенство нарушается:

$$\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{6}\right)=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}\neq\frac{11\pi}{6}.$$

Пример. Вычислим $\sin(\arccos 0{,}8)$. Пусть $\arccos 0{,}8=\alpha$; таким образом, мы ищем $\sin\alpha$. Имеем:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\cos^2(\arccos 0{,}8)=1-0{,}8^2=0{,}36.$$

Будучи арккосинусом, угол α принадлежит отрезку $[0;\pi]$. На этом отрезке синус положителен, поэтому

$$\sin\alpha=\sqrt{0{,}36}=0{,}6.$$

Итак, $\sin(\arccos 0{,}8)=0{,}6$.