Решение показательных неравенств

Решите неравенство: $6^{2x-8} > 1$

Представим правую часть в виде степени с основанием 6

$$6^{2x-8} > 6^{0}$$

Так как основание степени 6 > 1, то функция возрастает.

$$2x - 8 > 0 \qquad 2x > 8$$

$$x > 4$$

Ответ: $(4; +\infty)$

Решите неравенство: $5^{2x-3} < 125$

Представим правую часть в виде степени с основанием 5

$$5^{2x-3} < 5^3$$

Так как основание степени 5 > 1, то функция возрастает. Следовательно знак неравенства сохраняется для показателей.

$$2x - 3 < 3$$

$$2x < 6 \qquad x < 3$$

$$2x < 3 + 3$$

Ответ: $(-\infty; 3)$

Решите неравенство: $2^{x-3} \leq 4$

Представим правую часть в виде степени с основанием 2

$$2^{x-3} \leq 2^2$$

Так как основание степени 2 > 1, то функция возрастает.

$$x - 3 \leq 2 \qquad x \leq 5$$

$$x \leq 5$$

Ответ: $(-\infty; 5]$

Решите неравенство: $2^{x+2} + 2^x < 20$

Выносим за скобки общий множитель 2^x

$$2^x \, (2^2 + 1) < 20 \qquad 2^x \cdot 5 < 20$$

$$2^x < 20 \div 5 \qquad 2^x < 4$$

$$2^x < 2^2$$

Так как основание степени 2 > 1, то функция возрастает.

$$x < 2$$

Ответ: $(-\infty; 2)$

Решите неравенство: $2^{x+3} + 2^{x} < 36$

Выносим за скобки общий множитель 2^{x}

$$2^{x}\,(2^{3} + 1) < 36 \qquad 2^{x} \cdot 9 < 36$$

$$2^{x} < 36 \div 9 \qquad 2^{x} < 4$$

$$2^{x} < 2^{2}$$

Так как основание степени 2 > 1, то функция возрастает.

$$x < 2$$

Ответ: $(-\infty; 2)$

Решите неравенство: $3^{x+3} - 3^x > 78$

Выносим за скобки общий множитель 3^x

$$3^x(3^3 - 1) > 78$$

$$3^3 - 1 = 27 - 1 = 26$$

$$3^x \cdot 26 > 78 \qquad 3^x > 78 \div 26$$

$$3^x > 3$$

Так как основание степени 3 > 1, то функция возрастает. Следовательно знак неравенства сохраняется для показателей.

$$x > 1$$

Ответ: $(1; +\infty)$

Решите неравенство: $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^{x} \geq 21$

Выносим за скобки общий множитель 3^{x}

$$3^{x}(3^{2} - 3 + 1) \geq 21$$

$$3^{2} - 3 + 1 = 7$$

$$3^{x} \cdot 7 \geq 21$$

$$3^{x} \geq 21 \div 7$$

Так как основание степени 3 > 1, то функция возрастает. Следовательно знак неравенства сохраняется для показателей.

$$3^{x} \geq 3$$

$$x \geq 1$$

Ответ: $[1; +\infty)$

Решите неравенство:

$$5^{x+2} - 7 \cdot 5^x \le 90$$

Выносим за скобки общий множитель 5^x

$$5^x(5^2 - 7) \le 90 \qquad 25 - 7 = 18$$

$$5^x \cdot 18 \le 90 \qquad 5^x \le 90 \div 18$$

Так как основание степени 5 > 1, то функция возрастает. Следовательно знак неравенства сохраняется для показателей.

$$5^x \le 5 \qquad 5^x \le 5^1 \qquad x \le 1$$

Ответ: $(-\infty; 1]$

Решите неравенство: $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 > 0$

Выполним замену переменных: $t = 2^x \quad t^2 = 2^{2x}$

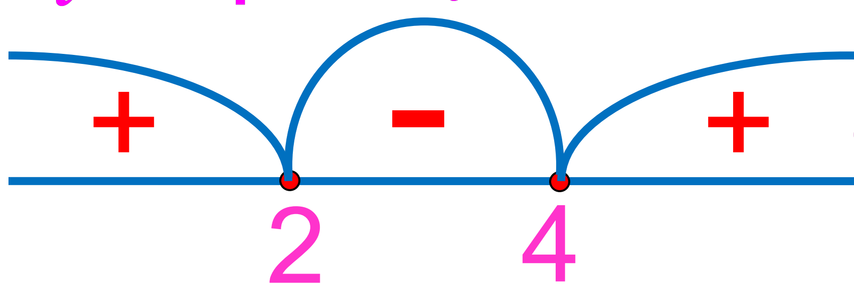
$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 8$$

$$D = 36 - 32 = 4$$

$$t = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$t = 4 \qquad t = 2$$



Основание степени 2 >1, возрастает

$$2^x < 2 \quad 2^x < 2^1$$

$$x < 1$$

$$2^x > 4$$

$$2^x > 2^2$$

$$x > 2$$

Ответ: $(-\infty; 1) \ (2; +\infty)$

Решите неравенство: $2^{2x} - 6 \cdot 2^{x} + 8 < 0$

Выполним замену переменных: $t = 2^{x}$ $t^{2} = 2^{2x}$

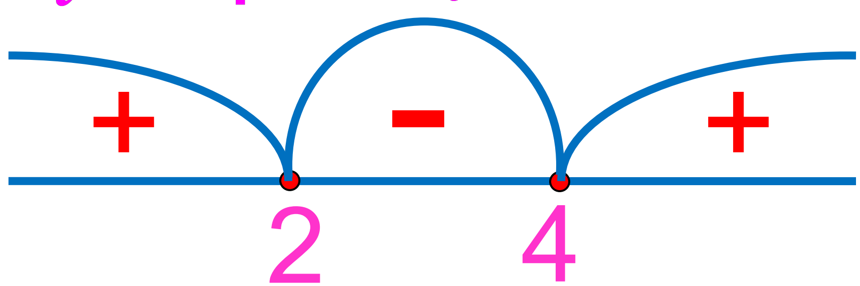
$$t^{2} - 6t + 8 = 0$$

$$D = 6^{2} - 4 \cdot 8$$

$$D = 36 - 32 = 4$$

$$t = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$t = 4$ $t = 2$



Основание степени 2 >1, возрастает

$$2 < 2^{x} < 4$$

$$2^{1} < 2^{x} < 2^{2}$$

$$1 < x < 2$$

Ответ: $(1; 2)$

Решите уравнение: $3^{2x} - 6\cdot 3^{x} - 27 < 0$

Выполним замену переменных: $t = 3^{x}$ $t^{2} = 3^{2x}$

$t^{2} - 6t - 27 < 0$ $D = 6^{2} + 4\cdot 27$

$D = 36 + 108 = 144$ $t = \frac{6 \pm 12}{2}$ $t = 9$ $t = -3$

$-3 < t < 9$

$3^{x} < 9$ $3^{x} < 3^{2}$ $x < 2$

Так как основание степени 3 > 1, то функция возрастает. Следовательно знак неравенства сохраняется для показателей.

$3^{x} > -3$ $3^{x} > 0$

Следовательно второе неравенство верно для любого значения x.

Ответ: $(-\infty; 2)$