Методы решения иррациональных уравнений и неравенств

подготовила
студентка 5 курса
Бородинова Е. А.
руководитель:
старший преподаватель
Беданоков Ш.Д.

Методы решения иррациональных уравнений:

- *метод возведения обеих частей уравнения в квадрат*
- *метод подстановки (замены переменной)*
- *метод монотонных функций*
- *метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений*
- *умножение обеих частей уравнения на функцию*
- *графический метод*

Пример. Решить уравнение $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$.

Решение: Составим систему равносильную данному уравнению:

$$\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 1-\sqrt{x^4-x^2} = x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ -\sqrt{x^4-x^2} = x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ \sqrt{x^4-x^2} = 2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^4-x^2 = 4x^2-2x^3+x^4 \\ 2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 5x^2-2x^3 = 0. \\ 2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$5x^2-2x^3 = 0,$$

$$x^2(5-2x) = 0,$$

$$x^2 = 0 \qquad \vee \qquad 5-2x = 0,$$

$$x = 0 \qquad\qquad 2x = 5,$$

$x = 2{,}5$ не удовлетворяет условию $2x - x^2 \geq 0$

Ответ: $\{0\}$.

Пример . Решить уравнение $\sqrt{3x^2-4x+15}+\sqrt{3x^2-4x+8}=7$

Решение: В данном уравнении совпадают только первые члены подкоренного выражения.

Обозначим их за новую переменную $3x^2-4x=y$, получится уравнение:

$\sqrt{y+15}+\sqrt{y+8}=7.$ Возведем правую и левую части уравнения в квадрат, получим:

$$\begin{cases} y+15+2\sqrt{y+15}\sqrt{y+8}+y+8=49, \\ y+15\geq 0, \\ y+8\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y+15}\sqrt{y+8}=26-2y, \\ y\geq -8; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+23y+120}=13-y, \\ y\geq -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+23y+120=169-26y+y^2, \\ y\leq 13, \\ y\geq -8; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49y=49, \\ -8\leq y\leq 13; \end{cases} \Leftrightarrow y=1.$$

Вернемся к нашему обозначению.

$$3x^2-4x=1,$$

$3x^2-4x-1=0,$ по теореме Виета $x_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3};\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}\right\}$.

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x)^2. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x)^2. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x)^2. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x)^2. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x)^2. \end{cases} \end{array} \right.$$

* Решить неравенство $\sqrt{\frac{9}{x^2}-3} > 1+\frac{3}{x}$.

Решение:

$$\sqrt{\frac{9}{x^2}-3} > 1+\frac{3}{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+\frac{3}{x} \geq 0 \\ \frac{9}{x^2}-3 > (1+\frac{3}{x})^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+\frac{3}{x} < 0 \\ \frac{9}{x^2}-3 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x+3}{x} \geq 0 \\ \frac{9}{x^2}-3 > 1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x+3}{x} < 0 \\ \frac{3(3-x^2)}{x^2} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x+3}{x} \geq 0 \\ \dfrac{4x+6}{x} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x+3}{x} < 0 \\ \dfrac{3(3-x^2)}{x^2} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $[-\sqrt{3}; 0)$.

Решить неравенство $\sqrt{4-\sqrt{-x-4}} > \sqrt{-x-3}$.

Решение:

$$\sqrt{4-\sqrt{-x-4}} > \sqrt{-x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-\sqrt{-x-4} \geq 0, \\ -x-3 \geq 0, \\ 4-\sqrt{-x-4} > -x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{-x-4} \geq -4, \\ -x \geq 3, \\ -\sqrt{-x-4} > -x-7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x-4} \leq 4, \\ x \leq -3, \\ \sqrt{-x-4} < x+7, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x-4 \geq 0, \\ -x-4 \leq 16, \end{cases} \\ x \leq -3, \\ \begin{cases} -x-4 \geq 0, \\ x+7 \geq 0 \\ -x-4 < x^2+14x+49 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x \geq 4, \\ -x \leq 20, \end{cases} \\ x \leq -3, \\ \begin{cases} -x \geq 4, \\ x \geq -7, \\ x^2+15x+53 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -4, \\ x \geq -20, \end{cases} \\ x \leq -3, \\ \begin{cases} x \leq -4, \\ x \geq -7, \\ x^2+15x+53 > 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2+15x+53 > 0,$$

$$x^2+15x+53 = 0.$$

$$D = 225-212 = 13,$$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{13}}{2}$. Из всех этих неравенств заключаем, что $x \in (\frac{-15+\sqrt{13}}{2};\ -4]$.

Ответ: $(\frac{-15+\sqrt{13}}{2};\ -4]$.