

**«Свои способности
человек может узнать,
только попытавшись
приложить их.»**

Сенека Младший



1) нат
24-100%
48-200%
 $\frac{54-100}{36} = 15$
Борис - 50 чпт
 $\frac{30-100\%}{6} = X$
 $\frac{6-100}{30} = 20$

«Свои способности
человек может узнать
только попытавшись
приложить их.»

Сенека М. д.

Цели урока:

- **Образовательные:** находить первообразные функции разного уровня, вычислять интеграл, проверить уровень обладания учащимися изученного материала по данной теме.
- **Развивающая:** развивать мыслительную деятельность учащихся, основанную на операциях анализа, сравнения, обобщения, систематизации и способность учащихся реализовать полученные знания при выполнении заданий различного уровня;
- **Воспитательная:** формировать мировоззренческие взгляды учащихся, воспитывать ответственность за полученный результат, чувство успеха, взаимответственности и самоутверждения, самоанализа, самооценки.

Знать:

- Определение первообразной;
- Первообразная определяется неоднозначно.
- Определение криволинейной трапеции.
- Алгоритм вычисления её площади.

Уметь:

- Находить первообразные функций.
- Находить криволинейные трапеции.
- Находить площади фигур.

Взаимно-обратные операции в математике

Прямая

$$x^2$$

Возведение в квадрат

$$\sin \alpha = a$$

Синус угла

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Дифференцирование

Обратная

$$\sqrt{x}$$

Извлечение из корня

$$\arcsin a = \alpha \quad a \in [-1; 1]$$

Арксинус числа

$$\int nx^{n-1} dx = x^n + C$$

Интегрирование

Первообразная

- Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Неоднозначность первообразной

$$f(x) = 2x \begin{cases} \longrightarrow F_1(x) = x^2 \longrightarrow F_1'(x) = 2x \\ \longrightarrow F_2(x) = x^2 + 1 \longrightarrow F_2'(x) = 2x \\ \longrightarrow F_3(x) = x^2 + 5 \longrightarrow F_3'(x) = 2x \end{cases}$$

$y = f(x)$ имеет бесконечно много первообразных вида $y = F(x) + C$, где C - произвольное число

- **Правило 1**

Первообразная суммы равна сумме первообразных.

- **Правило 2**

Если $F(x)$ -первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ - первообразная для $kf(x)$

- **Правило 3**

Если $y=F(x)$ - первообразная для функции $y=f(x)$, то первообразной для функции $y=f(kx+m)$ служит функция $y=1/kF(kx+m)$

Таблица первообразных

$$\alpha(t) = 3t^2 + 1; \alpha(1) = 4$$

$$v(t) = ?$$

$$v(t) = \frac{3t^2}{1} + t + C =$$

$$t^3 + t + C$$

$$4 = 1 + 1 + C; C = 2$$

$$\text{ответ: } t^3 + t + 2 = v(t)$$

$$\begin{array}{r} 24-100 \\ 48-200 \\ \hline 54-100 \\ 36 \\ \hline 30-100 \\ 2-x \\ \hline 6-100 \\ 30 \end{array} = 20$$

- Правило 1
Первообразная суммы равна сумме первообразных.
 - Правило 2
Если $F(x)$ -первообразная для $f(x)$,
первообразная для $kf(x)$
 - Правило 3
Если $y=F(x)$ - первообразная для функции $y=f(x)$, то первообразной для функции $y=f(kx+m)$ служит функция $y=1/kF(x)$
- Таблица первообразных*



• Правило 1
Первообразная суммы равна сумме первообразных.

• Правило 2
Если $F(x)$ -первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ -первообразная для $kf(x)$

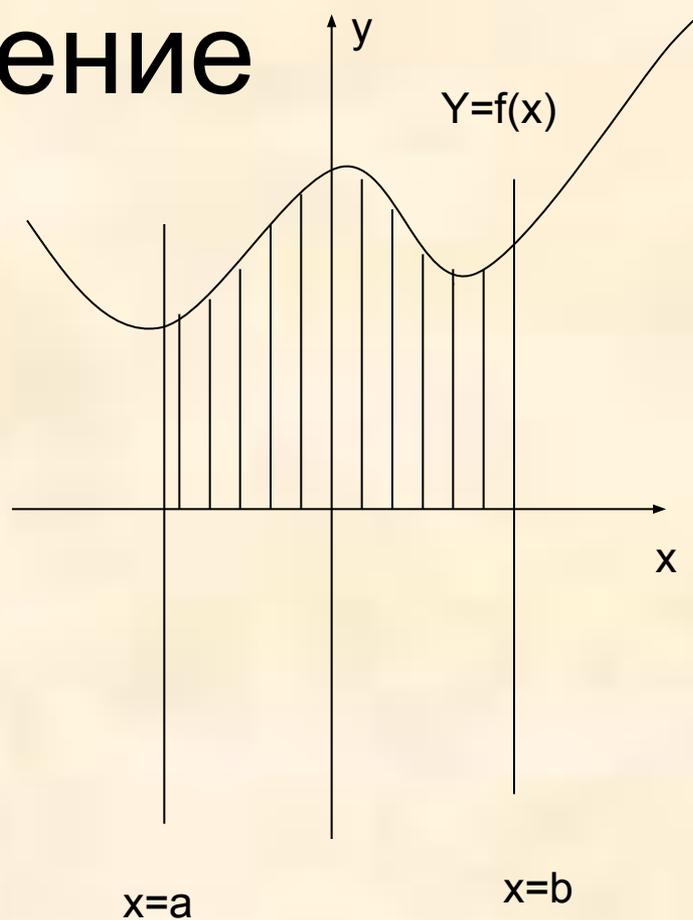
• Правило 3
Если $y=F(x)$ - первообразная для функции $y=f(x)$, то первообразной для функции $y=f(kx+m)$ служит функция $y=1/kF(kx+m)$

Таблица первообразных

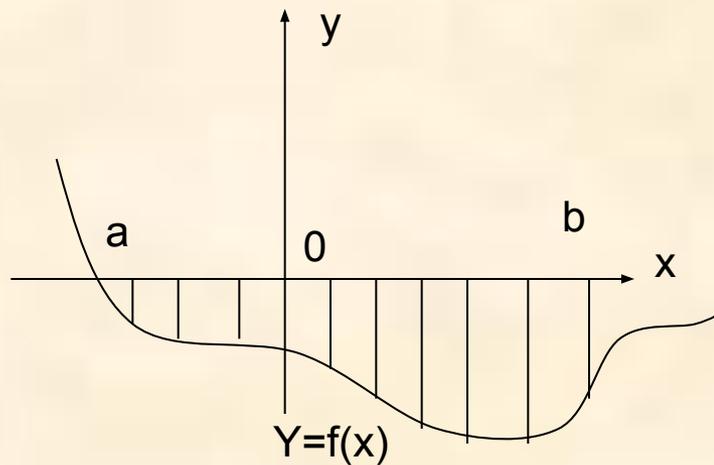
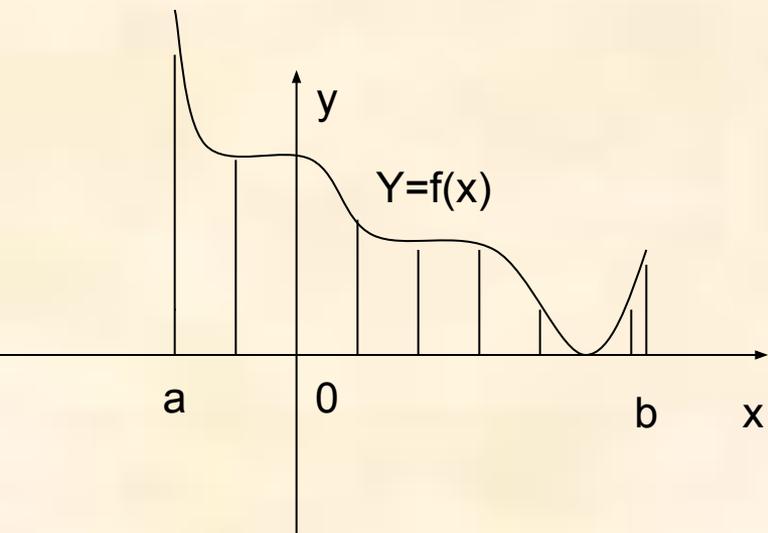
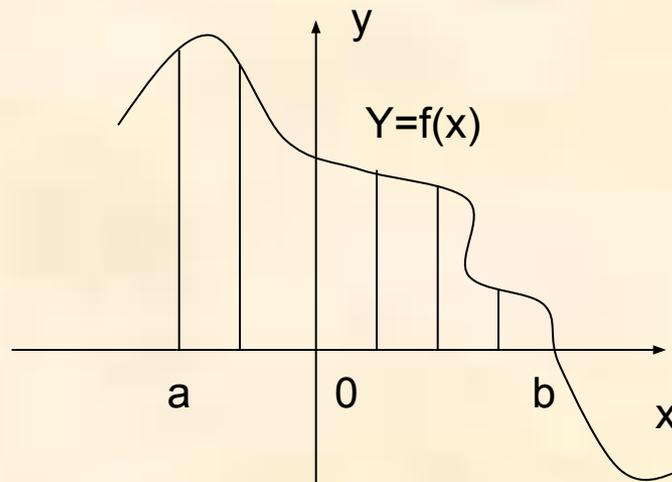
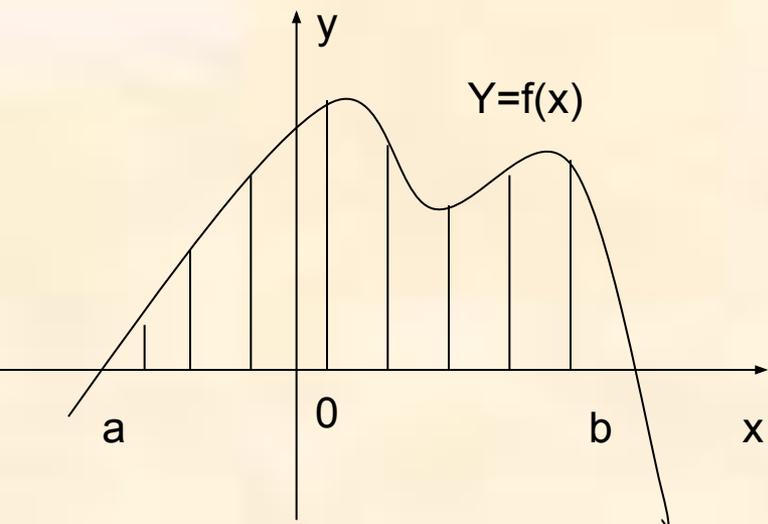


Определение

- Пусть на отрезке $[a;b]$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$, не меняющей на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют **криволинейной трапецией**.



Примеры



Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$.



Алгоритм нахождения площади фигуры

Задача: Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

1. Строим график данных функций.

2. Найдём абсциссы точек их пересечения (границы интегрирования) из уравнения: $f(x)=g(x)$.

Решаем его, находим $x_1=a, x_2=b$.

3. Выделяем фигуру, ограниченную данными линиями. Выясняем, является ли данная фигура криволинейной трапецией.

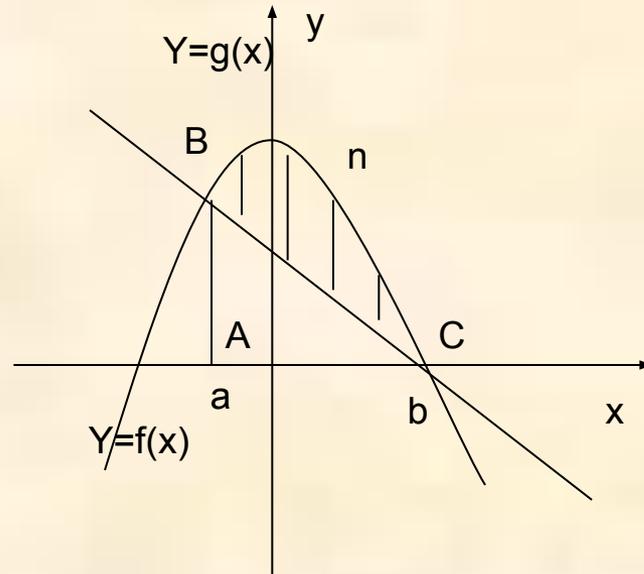
4. Ищем площадь данной фигуры:

Площадь криволинейной трапеции находим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S_{\text{фиг.}} = S_{\text{кр.трап.}ABnC} - S_{ABC}$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$





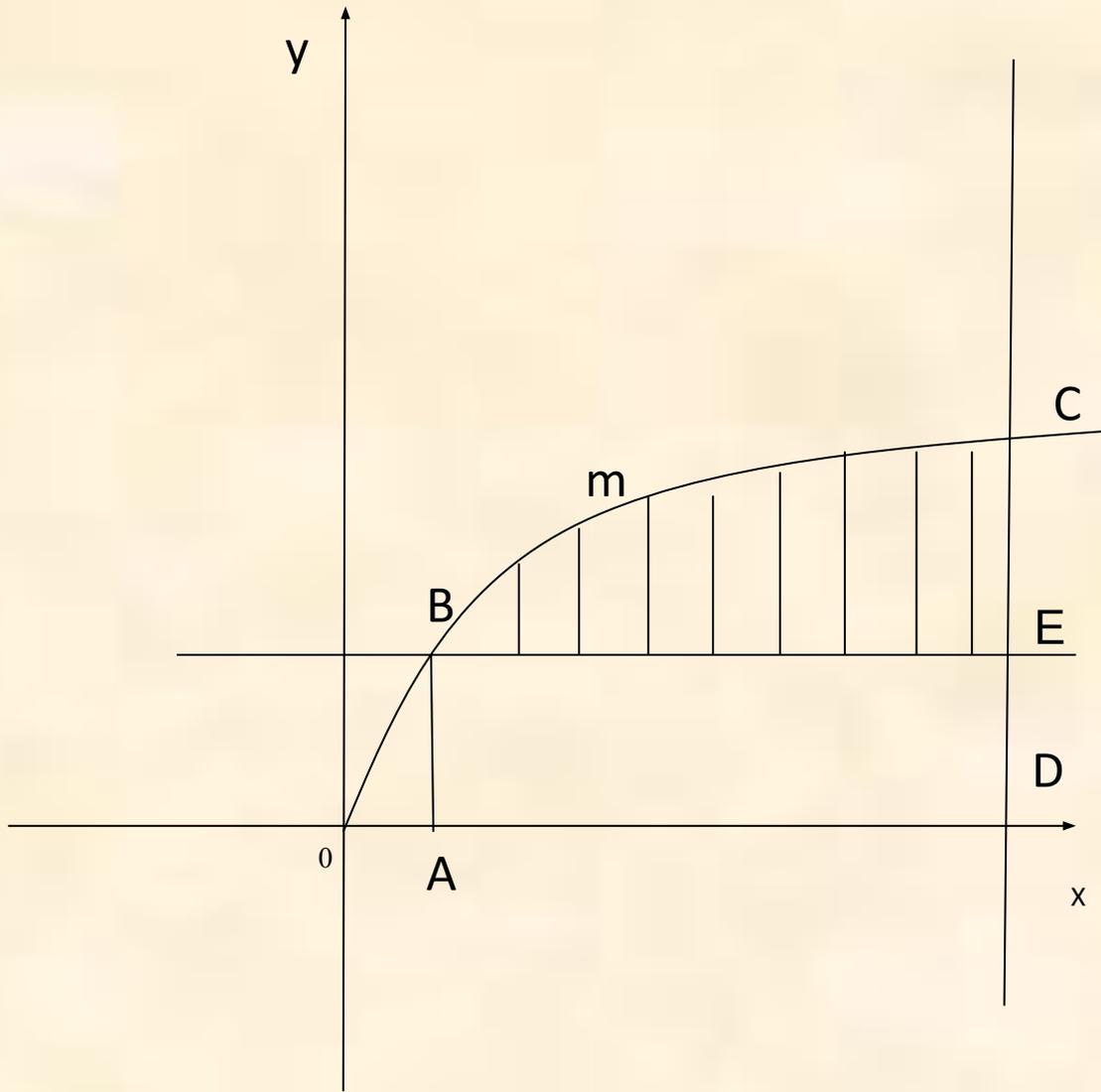
$$a(t) = 3t^2 + 1, v(4) = 4$$

$$v(t) = ?$$

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (3t^2 + 1) dt = t^3 + t + C =$$

$$4 = 4^3 + 4 + C, C = 2$$

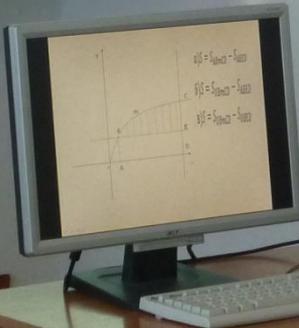
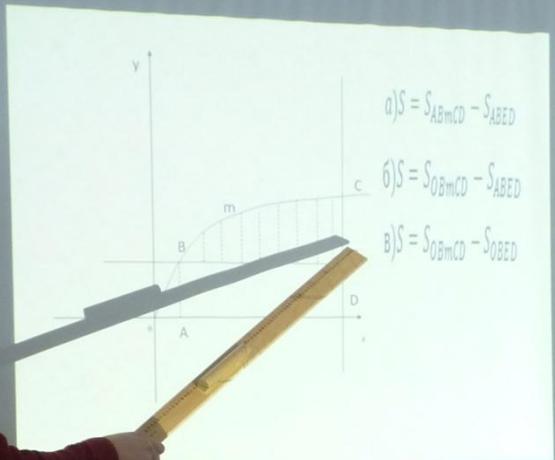
$$\text{Answer: } v(t) = t^3 + t + 2 = v(t)$$



$$a) S = S_{ABmCD} - S_{ABED}$$

$$b) S = S_{OBmCD} - S_{ABED}$$

$$B) S = S_{OBmCD} - S_{OBED}$$



ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$
 $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + H)$
 $V = \pi R^2 H$

КОНУС

$S_{\text{бок}} = \pi Rl$
 $S_{\text{полн}} = \pi R(R + l)$
 $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

$S_{\text{бок}} = \pi(R + r)L$
 $S_{\text{полн}} = \pi(R + r)L + \pi(R^2 + r^2)$
 $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$

ШАР

$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$
 $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$
D - диаметр

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
 $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
 $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

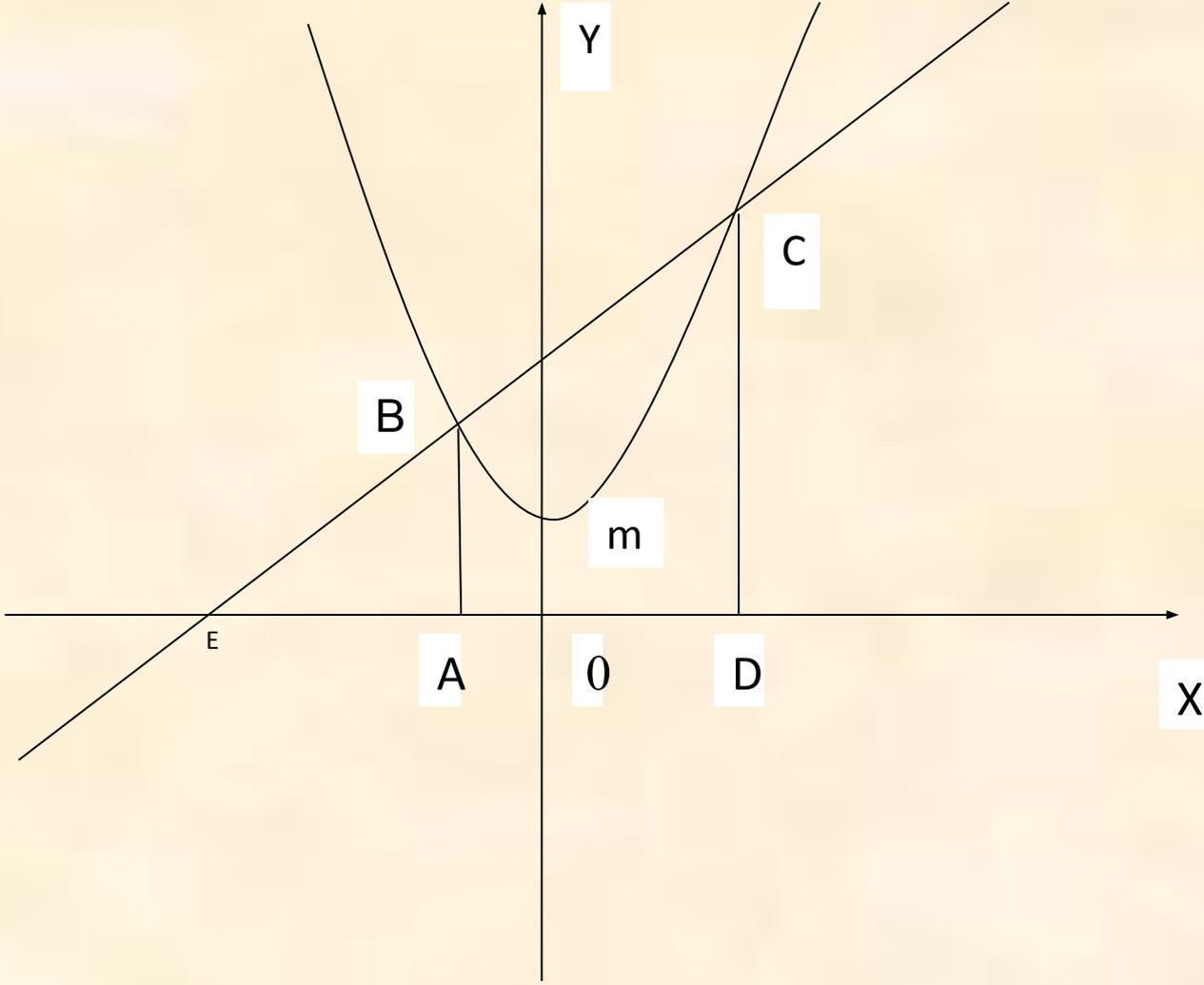
ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ СИНОСУСОВ И КОСИНУСОВ

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$





$$a) S = S_{ABmCD} - S_{ABCD}$$

$$b) S = S_{ABCD} - S_{ABmCD}$$

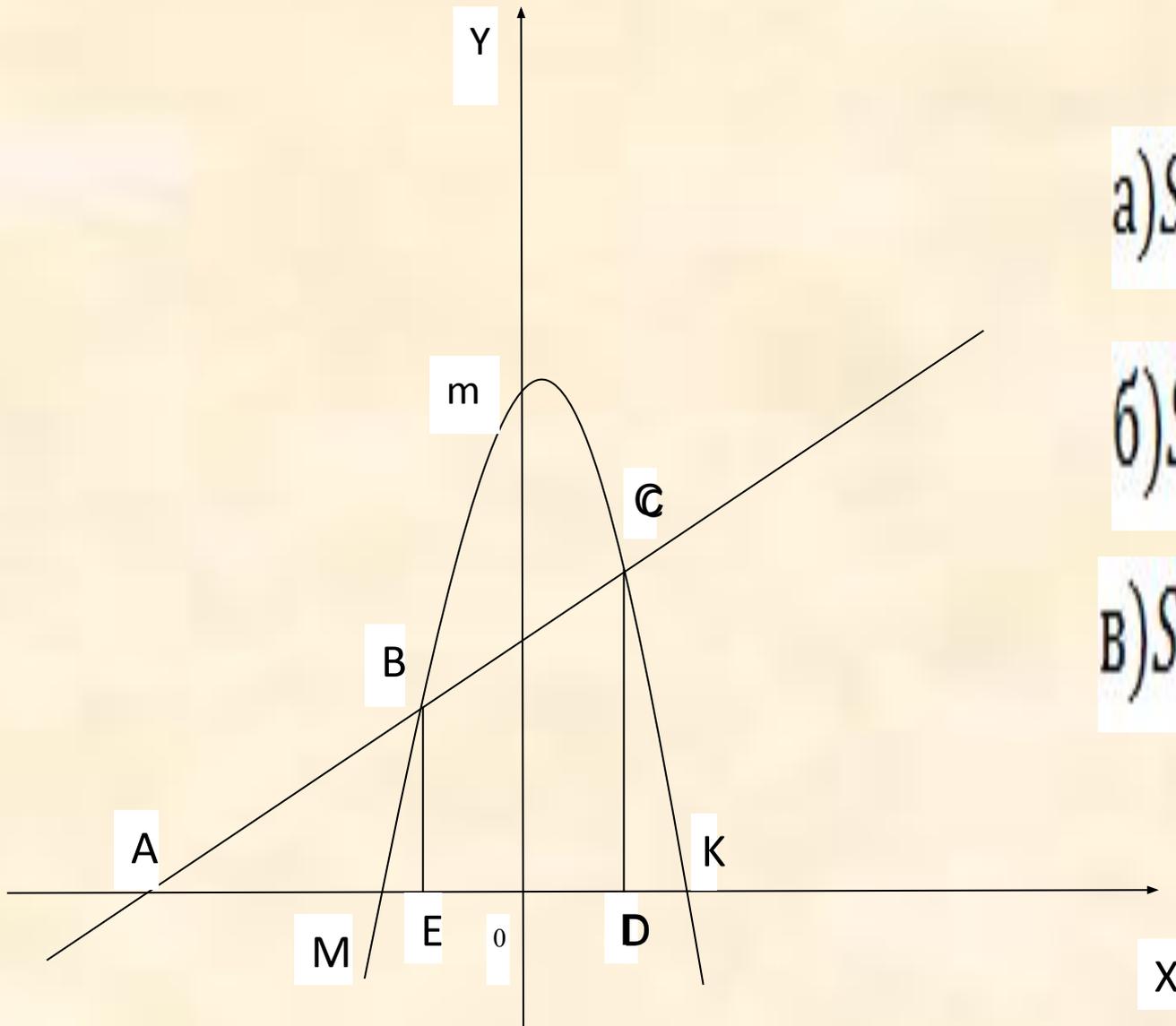
$$B) S = S_{EBCD} - S_{ABmCD}$$

x_2
 $\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{5}$



Persepsi:
Sampai $\frac{1}{5}$





$$a) S = S_{MBmCK} - S_{MBCK};$$

$$б) S = S_{EBmCD} - S_{EBCD};$$

$$B) S = S_{MBmCD} - S_{EBCD}.$$

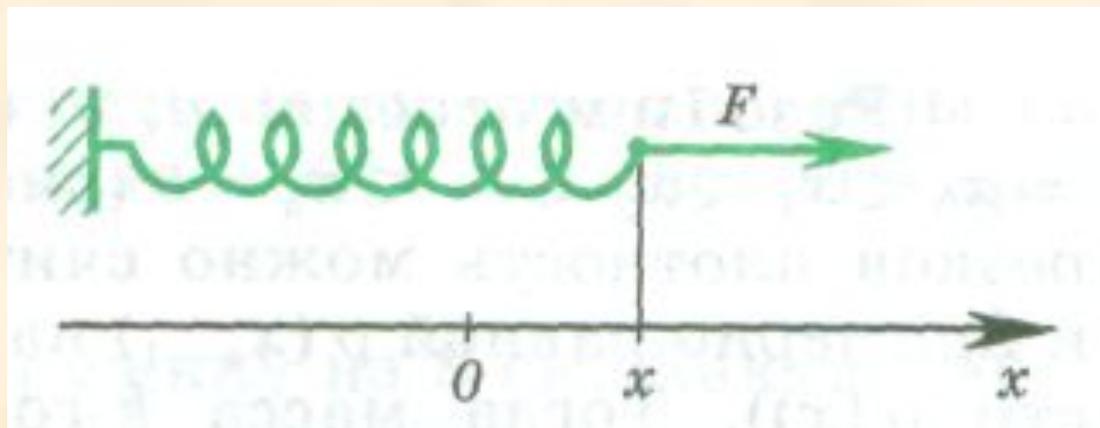
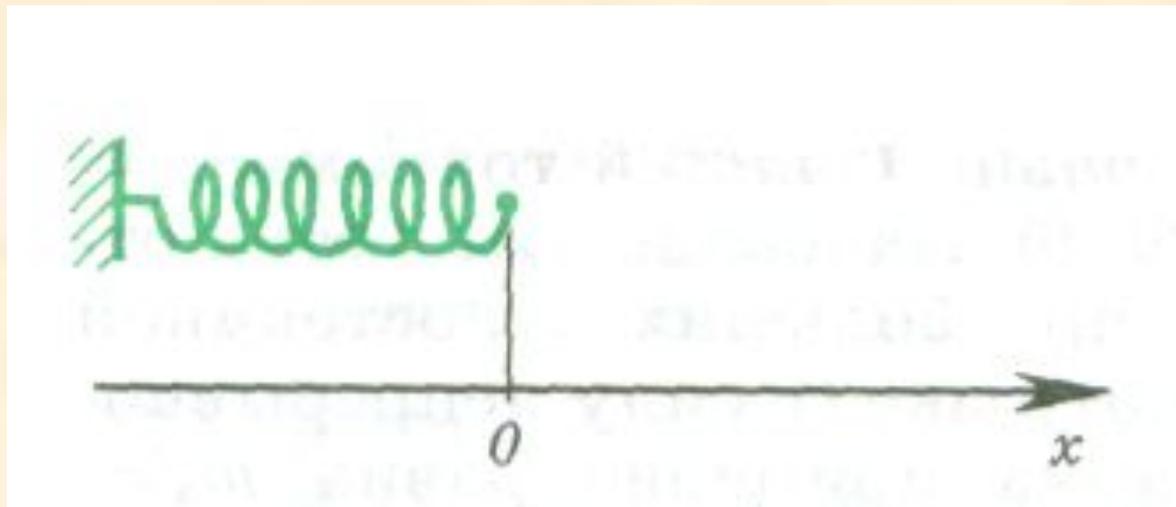
Прирост численности популяции.

$N(t)$ прирост численности за промежуток времени от t_0 до T , $v(t)$ – скорость роста некоторой популяции.

$$N(t) = \int_{t_0}^T v(t) dt$$

интеграл от скорости

по интервалу времени ее размножения.



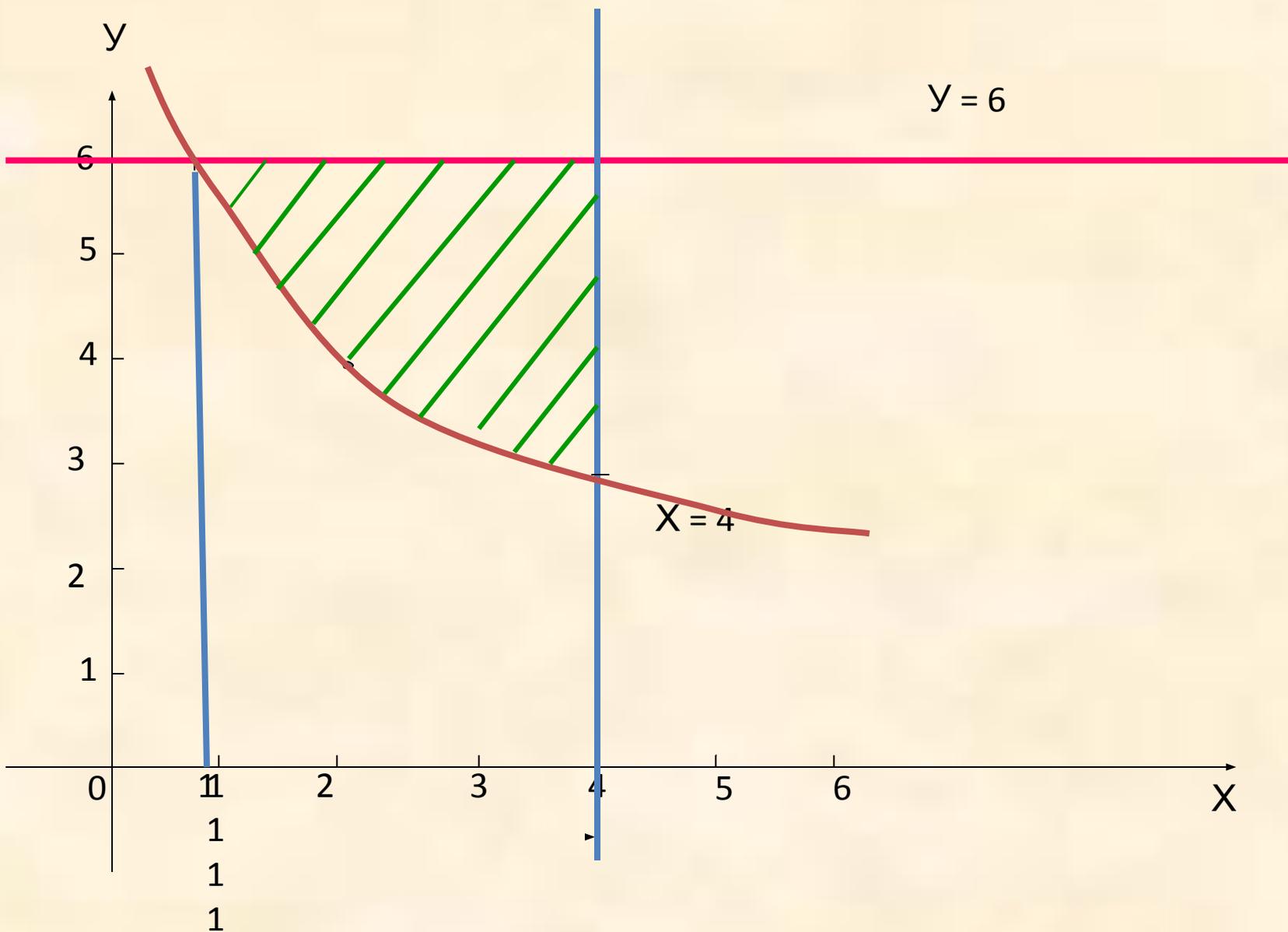
Задача:

Перед зданием школы решено разбить клумбу.
Но по форме клумба не должна быть круглой,
квадратной или прямоугольной.

Она должна содержать в себе прямые и кривые
линии.

Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной
линиями $Y=4/X+2$; $X=4$; $Y=6$. Необходимо еще
подсчитать сколько денег можно получить за
вскапывания этой клумбы, если за каждый m^2
выплачивают 50 руб...?

Построим график и выделим искомую площадь:



2. Найдем пределы интегрирования:

$y=4$ - по условию,

$y=4/x+4$ и $y=6$,

следовательно $4/x+2=6$;

$$4/x=4$$

$$x = 1$$

3. Вычислим площадь полученной фигуры с помощью интеграла:

$$S = \int_1^4 (6 - 4/x - 2) dx = \int_1^4 (4 - 4/x) dx = (4x - 4 \ln |x|) \Big|_1^4 = 16 - 4 \ln 4 - 4 + 4 \ln 1 = 12 - 4 \ln 4 \approx 6,4 (\text{м}^2)$$

$6,4 \cdot 50 = 320$ (руб.) -
заработок.





**СОХРАНИТЕ СЕБЯ В НЕУСТРОЕННОМ
МИРЕ:**

**НИЧЕГО, ЧТО НЕ ВЫБИЛИСЬ ВЫ В
КОРОЛИ.**

**СОХРАНИТЕ СЕБЯ, ЕСЛИ ВАС
УРОНИЛИ.**

**СОХРАНИТЕ СЕБЯ, ЕСЛИ ВАС
ВОЗНЕСЛИ.**

**СОХРАНИТЕ СЕБЯ: СВОЁ СЕРДЦЕ И
СЛОВО-**

**В ЭТОМ МИРЕ ДРУГОГО НЕ БУДЕТ В
СУДЬБЕ,**

СВО СЕРДЦЕ И СЛОВО-