

Тема урока:

**«Формулы арксинуса,
арккосинуса, арктангенса,
арккотангенса»**



Цель урока:

1) Повторение основных свойств обратных тригонометрических функций

2) Формирование алгоритма вычислений значений тригонометрических выражений, в которых участвуют обратные тригонометрические функции и применение алгоритма для решения более сложных задач (решение экзаменационных заданий ЕГЭ)

3) Развитие познавательного интереса учащихся к предмету через систему нестандартных задач.



План урока:

- I. Орг. момент (2-3 мин)
- II. Актуализация знаний (8-10 мин)
- III. Изучение нового материала (8 мин)
- IV. Закрепление нового материала (10 мин)
- V. Самостоятельная работа (12 мин)
- VI. Итоги урока
- VII. Задание на дом



Слова В.А.Сухомлинского

«Сегодня мы учимся вместе – я, ваш учитель, и вы, мои ученики.

Но в будущем ученик должен превзойти учителя, иначе в науке не будет прогресса»



Ход урока

I. На прошлом уроке учащиеся изучили определение аркфункций и их свойства, учились находить область определения и область значений функций, содержащих арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Дома ученики должны были повторить тригонометрические формулы и решить упражнение.



II. Фронтальный опрос

1) Что называется арксинусом числа a ?

ответ:

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $a \in [-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен a



**2) Что называется арккосинусом
числа a ?**

ответ:

**Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$
называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$,
косинус которого равен a**



3) Что называется арктангенсом
числа a ?

ответ:

Арктангенсом числа $a \in \mathbb{R}$ называется
такое число $a \in (-\pi/2; \pi/2)$, тангенс
которого равен a



4) Что называется арккотангенсом
числа a ?

ответ:

(Арккотангенсом числа $a \in \mathbb{R}$ называется
такое число $a \in (0; \pi)$, котангенс которого
 a)



5) Чему равен $\sin(\arcsin a)$, $\cos(\arccos a)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)$?

(Какие значения принимает a ?)

$$\sin(\arcsin a) = a, \cos(\arccos a) = a, a \in [-1; 1]$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, a \in \mathbb{R}$$

6) Чему равен $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$?

Какие значения принимает x ?

$$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\pi/2; \pi/2]$$

$$\arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi]$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in (-\pi/2; \pi/2)$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0; \pi)$$



Вычислите:

№1 (выполняет ученик у доски).

$$\cos\left(\arcsin \frac{2}{3}\right)$$

1. Пусть $\arcsin \frac{2}{3} = \alpha$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

2. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha > 0$, т.е. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $\cos\left(\arcsin \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



№2 (учащиеся выполняют задание по вариантам, у доски его выполняют двое учащихся, выполненные задания проверяются всем классом).

a) $\cos(\arcsin \frac{5}{13})$

1. Пусть $\arcsin \frac{5}{13} = \alpha$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

2. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha > 0$, т.е. $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

Ответ: $\cos(\arcsin \frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$.



Примеры решения

$$3) \cos(\arccos 2) = \text{не сущ}$$

$$4) \arcsin\left(\cos \frac{2}{17}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{17}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{17}$$

$$5) \operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{не сущ}$$

$$a) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4); \quad \left| \begin{array}{c} 4 \\ \end{array} \right|$$

$$б) \sin\left(\arcsin \frac{12}{13}\right); \quad \left| \begin{array}{c} 12 \\ 13 \end{array} \right|$$

$$в) \cos\left(\arccos \frac{1}{4}\right); \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right|$$

$$г) \operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} 5); \quad \left| \begin{array}{c} 5 \\ \end{array} \right|$$

$$д) \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right); \quad \left| \begin{array}{c} \sqrt{3} \\ 2 \end{array} \right|$$

$$е) \sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right); \quad \left| \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \right|$$

Выполнение последнего задания может вызвать затруднения. Однако создание проблемной ситуации на этом этапе позволит логически перейти к изучению новой темы.



III Изучение нового материала

<i>Вопросы учителя:</i>	<i>Запись на доске и в тетради:</i>
Итак, нужно найти $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.	$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$
Что называется арккосинусом числа α ?	<p>1) Пусть $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$,</p> <p>тогда $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.</p>
Как найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$?	<p>2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$</p> $ \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$ $= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$
Как определить знак $\sin\alpha$?	<p>3) $0 \leq \alpha \leq \pi$ значит, $\sin\alpha > 0$,</p> <p>т.е. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.</p> <p>Ответ: $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.</p>



**Основные формулы: арксинус,
арккосинус ,арктангенс ,
арккотангенс.**

**Связь между различными
арк-функциями**



Область определения и множество значений:

Значения функции:	Значения аргумента:
$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$	$-1 \leq x \leq 1$
$0 \leq \arccos x \leq \pi$	$-1 \leq x \leq 1$
$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < +\infty$
$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$	$-\infty < x < +\infty$

Основные тождества:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$
$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$	$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}(x)$



Значения тригонометрических функций от обратных тригонометрических функций:

z	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$\sin z$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos z$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg} z$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{ctg} z$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x



Взаимосвязь арктангенса с другими обратными тригонометрическими функциями:

	$\arcsin z$	$\arccos z$	$\operatorname{arctg} z$
$\operatorname{arctg} x, x > 0$	$\arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$	$\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$	$\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$
$\operatorname{arctg} x, x < 0$		$-\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$	$\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) - \pi$



Формулы сложения для обратных тригонометрических функций:

$\arcsin x + \arcsin y =$	$\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	при $xy \leq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$
	$\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	при $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1$
	$-\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	при $x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1$

$\arccos x + \arccos y =$	$\arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	при $x + y \geq 0$
	$2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	при $x + y < 0$

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y =$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$	при $xy < 1$
	$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi$	при $xy > 1, x > 0, y > 0$
	$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi$	при $xy > 1, x < 0, y < 0$



IV. Закрепление



Вычислите:

№1 (выполняет ученик у доски).

$$\cos(\arcsin \frac{2}{3})$$

1. Пусть $\arcsin \frac{2}{3} = \alpha$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

2. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha > 0$, т.е. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $\cos(\arcsin \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



№2 (учащиеся выполняют задание по вариантам, у доски его выполняют двое учащихся, выполненные задания проверяются всем классом).

a) $\cos(\arcsin \frac{5}{13})$

1. Пусть $\arcsin \frac{5}{13} = \alpha$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

2. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{12}{13}} = \frac{12}{13}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha > 0$, т.е. $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

Ответ: $\cos(\arcsin \frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$.



$$6) \sin(\arccos \frac{1}{3})$$

$$1. \text{ Пусть } \arccos \frac{1}{3} = \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$2. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$3. \text{ т.к. } 0 \leq \alpha \leq \pi, \text{ то } \sin \alpha > 0, \text{ т.е. } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \sin(\arccos \frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



№3 $\cos(2 \arcsin \frac{3}{5})$

$$\cos(2 \arcsin \frac{3}{5}) = 1 - 2 \sin^2(\arcsin \frac{3}{5}) = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

№4 $\sin(\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}})$

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}) &= \\ &= \sin(\arcsin \frac{4}{5}) \cos(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}) + \cos(\arcsin \frac{4}{5}) \sin(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}) = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$



№5

Реши уравнения:

$$а) \cos(\arccos(x+2)) = x+2$$

данное равенство верно,
если

$$|x+2| \leq 1;$$

$$-1 \leq x+2 \leq 1;$$

$$-3 \leq x \leq -1.$$

$$\text{Ответ: } [-3; -1]$$

$$б) \sin(\arcsin(x-1)) = x^2 - 4x + 5$$

$$\begin{cases} |x-1| \leq 1, \\ x-1 = x^2 - 4x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1, \\ x^2 - 5x + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ \begin{cases} x=3; \\ x=2; \end{cases} \Rightarrow (x=2) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 2$$



V. Итог урока

Итак, на уроке ученики научились находить значения косинуса от арккосинуса и синуса от арккосинуса. Вопросы нахождения синуса от арктангенса или тангенса от арккосинуса или арксинус от котангенса и т.д. мы будем рассматривать на следующих занятиях. Главное запомнить принцип выполнения подобных заданий.



VI Домашнее задание

В качестве домашнего задания учащимся предлагается решить №

1) $\sin(2 \arcsin \frac{3}{5})$; 2) $\sin(\arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{2}{3})$; 3) $\sin(\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13})$

