Тема урока:

«Формулы арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса»

Цель урока:

1)Повторение основных свойств обратных тригонометрических функций

2)Формирование алгоритма вычислений значений тригонометрических выражений, в которых участвуют обратные тригонометрические функции и применение алгоритма для решения более сложных задач (решение экзаменационных заданий ЕГЭ)

3)Развитие познавательного интереса учащихся к предмету через систему нестандартных задач.

План урока:

I.Орг. момент(2-3 мин)
II.Актуализация знаний(8-10 мин)
III.Изучение нового материала (8 мин)
IV.Закрепление нового материала (10 мин)
V.Самостоятельная работа (12 мин)
VI.Итоги урока
VII.Задание на дом

Слова В.А.Сухомлинского

**«Сегодня мы учимся вместе –
я, ваш учитель, и вы, мои ученики.
Но в будущем ученик должен превзойти учителя, иначе в науке не будет прогресса»**

Ход урока

I.На прошлом уроке учащиеся изучили определение аркфункций и их свойства, учились находить область определения и область значений функций, содержащих арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Дома ученики должны были повторить тригонометрические формулы и решить упражнение.

II.Фронтальный опрос

1) Что называется арксинусом числа а?
ответ:
Арксинусом числа а€[-1;1] называется такое число а€[-∏/2; ∏/2], синус которого равен а

2) Что называется арккосинусом числа а?

ответ:

Арккосинусом числа а€[-1;1] называется такое число а€[0;∏], косинус которого равен а

3) Что называется арктангенсом числа а?

ответ:

Арктангенсом числа а€R называется такое число а€(-∏/2;∏/2), тангенс которого равен а

4) Что называется арккотангенсом числа а?

ответ:

(Арккотангенсом числа а€R называется такое число а€(0;П), котангенс которого а)

5)Чему равен sin(arcsin a), cos(arccos a), tg(arctg), ctg(arcctg) a)?

(Какие значения принимает a?

sin (arcsin a)=a, cos(arccos a), a€[-1;1]

tg(arctg a)=a, ctg(arcctg a)=a. a€R

6)Чему равен arcsin(sin x), arccos(cos x), arctg(tg x), arcctg(ctg x)?

Какие значения принимает x?

arcsin(sin)=x, x€[-∏/2;∏/2]

arcos(cos x)=x, x€[0;∏]

arcctg(tg x)=x, x€(-∏/2;∏/2)

arcctg(ctg x)=x, x€(0;∏)

Вычислите:

№1 (выполняет ученик у доски).

$$\cos(\arcsin\frac{2}{3})$$

1. Пусть $\arcsin\frac{2}{3}=\alpha,\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\ \sin\alpha=\frac{2}{3}.$

2. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha>0$, т.е. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

Ответ: $\cos(\arcsin\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

№2 (учащиеся выполняют задание по вариантам, у доски его выполняют двое учащихся, выполненные задания проверяются всем классом).

а) $\cos(\arcsin \frac{5}{13})$

1. Пусть $\arcsin \frac{5}{13} = \alpha$, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

2. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{12}{13}} = \frac{12}{13}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha > 0$, т.е. $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

Ответ: $\cos(\arcsin \frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$.

Примеры решения

3) $\cos(\arccos 2) =$ не сущ

4) $\arcsin(\cos \frac{2}{17}) = \arcsin(\sin (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{17})) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{17}$

5) $tg(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}) -$ не сущ

.

а) $tg(arctg\, 4)$;	4	г) $ctg(arcctg\, 5)$;	5
б) $\sin\left(\arcsin \frac{12}{13}\right)$;	$\frac{12}{13}$	д) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
в) $\cos\left(\arccos \frac{1}{4}\right)$;	$\frac{1}{4}$	е) $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$.	$\frac{4}{5}$

Выполнение последнего задания может вызвать затруднения. Однако создание проблемной ситуации на этом этапе позволит логически перейти к изучению новой темы.

||| Изучение нового материала

Вопросы учителя:	*Запись на доске и в тетради:*
Итак, нужно найти $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.	$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$
Что называется арккосинусом числа a?	1) Пусть $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$, тогда $0\le\alpha\le\pi$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.
Как найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$?	2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\lvert\sin\alpha\rvert=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$ $=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.
Как определить знак $\sin\alpha$?	3) $0\le\alpha\le\pi$, значит, $\sin\alpha>0$, т.е. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Ответ: $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$.

Основные формулы: арксинус, арккосинус ,арктангенс , арккотангенс.
Связь между различными арк-функциями

Область определения и множество значений:

Значения функции:	Значения аргумента:
$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$	$-1 \le x \le 1$
$0 \le \arccos x \le \pi$	$-1 \le x \le 1$
$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg} x < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < +\infty$
$0 < \mathrm{arcctg} x < \pi$	$-\infty < x < +\infty$

Основные тождества:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$	$\mathrm{arctg} x + \mathrm{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$
$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}(x)$	$\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}(x)$

Значения тригонометрических функций от обратных тригонометрических функций:

z	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
sin z	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos z	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg z	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg z	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x

Взаимосвязь арктангенса с другими обратными тригонометрическими функциями:

<table>
<tr><th></th><th>arcsin z</th><th>arccos z</th><th>arcctg z</th></tr>
<tr><td>$\operatorname{arctg} x,\ x>0$</td><td rowspan="2">$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$</td><td>$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$</td><td>$\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right)$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{arctg} x,\ x<0$</td><td>$-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$</td><td>$\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right)-\pi$</td></tr>
</table>

Формулы сложения для обратных тригонометрических функций:

$\arcsin x + \arcsin y =$	$\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	при $xy \le 0$ или $x^2 + y^2 \le 1$
	$\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	при $x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1$
	$-\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	при $x < 0,\ y < 0,\ x^2 + y^2 > 1$

$\arccos x + \arccos y =$	$\arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	при $x + y \ge 0$
	$2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	при $x + y < 0$

$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y =$	$\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$	при $xy < 1$
	$\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + \pi$	при $xy > 1,\ x > 0,\ y > 0$
	$\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) - \pi$	при $xy > 1,\ x < 0,\ y < 0$

IV. Закрепление

Вычислите:

№1 (выполняет ученик у доски).

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$$

1\. *Пусть* $\arcsin\frac{2}{3}=\alpha,\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\ \sin\alpha=\frac{2}{3}.$

2\. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3\. *т.к.* $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, *то* $\cos\alpha>0$, *т.е.* $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

Ответ: $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

№2 (учащиеся выполняют задание по вариантам, у доски его выполняют двое учащихся, выполненные задания проверяются всем классом).

а) $\cos(\arcsin\frac{5}{13})$

1. *Пусть* $\arcsin\frac{5}{13}=\alpha,\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\ \sin\alpha=\frac{5}{13}.$

2. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{12}{13}}=\frac{12}{13}.$$

3. *т.к.* $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, *то* $\cos\alpha>0$, *т.е.* $\cos\alpha=\frac{12}{13}.$

Ответ: $\cos(\arcsin\frac{5}{13})=\frac{12}{13}.$

б) $\sin(\arccos\frac{1}{3})$

1. *Пусть* $\arccos\frac{1}{3}=\alpha,\ 0\le\alpha\le\pi,\ \cos\alpha=\frac{1}{3}.$

2. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3. *т.к.* $0\le\alpha\le\pi$, *то* $\sin\alpha>0$, *т.е.* $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

Ответ: $\sin(\arccos\frac{1}{3})=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

№3 $\cos(2\arcsin\frac{3}{5})$

$$\cos(2\arcsin\frac{3}{5}) = 1 - 2\sin^2(\arcsin\frac{3}{5}) = 1 - 2\cdot\frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

№4 $\sin(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}})$

$$\sin(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}) =$$

$$= \sin(\arcsin\frac{4}{5})\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}) + \cos(\arcsin\frac{4}{5})\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}) =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

№5

Реши уравнения:

а) $\cos(\arccos(x+2)) = x+2$

данное равенство верно, если

$|x+2| \le 1;$

$-1 \le x+2 \le 1;$

$-3 \le x \le -1.$

Ответ: $[-3;-1]$

б) $\sin(\arcsin(x-1)) = x^2 - 4x + 5$

$$\begin{cases} |x-1| \le 1, \\ x-1 = x^2 - 4x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x-1 \le 1, \\ x^2 - 5x + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3; \\ x = 2; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow (x = 2)$$

Ответ: 2

V. Итог урока

**Итак, на уроке ученики научились находить значения косинуса от
арккосинуса и синуса от арккосинуса. Вопросы нахождения синуса
от арктангенса или тангенса от арккосинуса или арксинус от котангенса
и т .д мы будем рассматривать на следующих занятиях. Главное запомнить
принцип выполнения подобных заданий.**

VIДомашнее задание

В качестве домашнего задания учащимся предлагается решить №

1) $\sin(2\arcsin\frac{3}{5})$; 2) $\sin(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3})$; 3) $\sin(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13})$