Общие методы решения уравнений

- Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$;
- Метод разложения на множители;
- Метод введения новой переменной;
- Функционально- графический метод.

Замена уравнения h(f(x))=h(g(x)) уравнением f(x)=g(x):

- При решении показательных уравнений, когда переходим от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (а>0, а≠1) к уравнению ***f(x)=g(x)***;
- При решении логарифмических уравнений, когда переходим от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению ***f(x)=g(x)***;
- При решении иррациональных уравнений, когда переходим от уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению ***f(x)=g(x)***.

Когда можно применять:

Только в том случае, когда y=h(x)- монотонная функция, которая каждое своё значение принимает по одному разу.

$\boldsymbol{y = x^7}$- возрастающая функция, поэтому от уравнения $\boldsymbol{(2x+2)^7 = (5x-9)^7}$ можно перейти к уравнению **2x + 2 = 5x – 9**

$$\boldsymbol{x = \frac{11}{3}}$$

Когда нельзя применять:

- Когда y=h(x)- немонотонная функция, возможна потеря корней.

Уравнение $(2x+2)^4 = (5x-9)^4$ нельзя заменить уравнением **2x + 2 = 5x – 9** с корнем $x = \frac{11}{3}$. Потеряли корень x = 1.

Причина: $\mathbf{y} = \mathbf{x}^4$ -немонотонная функция.

Уравнение $\sin 17x = \sin 7x$ нельзя заменить уравнением ***17x = 7x***

Метод разложения на множители:

Замена уравнения **$f(x)g(x)h(x)=0$** совокупностью уравнений:

$$f(x)=0;$$

$$g(x)=0;$$

$$h(x)=0.$$

Все найденные корни проверить по ОДЗ исходного уравнения, посторонние отбросить.

Пример:

Решить уравнение

$$(\sqrt{x+2}-3)(2^{x^2+6x+5}-1)\,ln(x-8)=0$$

Решить совокупность уравнений

$\sqrt{x+2}-3=0;$

$2^{x^2+6x+5}-1$=0;

$ln(x-8)=0.$

Получим корни: x_1=7; x_2=-1; x_3=-5; x_4=9.

Проверим по ОДЗ исходного уравнения:

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-8>0 \end{cases}$$

x_1=7; x_2=-1; x_3=-5 – посторонние корни

Ответ: **x =9.**

Пример:

Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$
Представим слагаемое **7х** в виде **х +6х**
$x^3 - x - 6x + 6 = 0;$
Сгруппируем 1 и 2 слагаемые и 3 с 4:
$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0;$
Получим уравнение:$(\mathrm{x} - 1)(x^2 + \mathrm{x} - 6) = 0;$
Решим совокупность: $\mathrm{x} - 1$**=0 и** $x^2 + \mathrm{x} - 6$**=0**
Получим корни: x_1**=1**, x_2**=2**, x_3**=-3.**
Проверим корни : посторонних корней нет
Ответ: **1**, **2**, **-3.**

Метод введения новой переменной:

- Уравнение ***f(x)=0*** преобразовать к виду ***p(g(x))=0***;
- Ввести новую переменную ***u =g(x)***;
- Решить уравнение ***p(u)=0***;
- Решить совокупность уравнений **g(x)=u_1; g(x)=u_2;…; g(x)=u_n**, где u_1, u_2,…, u_n- корни уравнения p(u)=0.

Пример:

Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$

Введём новую переменную: $u = x^2 - x$;

Получим уравнение: $\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}$;

Выполним преобразования и получим уравнение: $u^2 + 9u - 22 = 0$

Найдём корни уравнения: u_1=2 и u_2=-11

Выполним проверку :u_2=-11 – посторонний корень.

Вернёмся к исходной переменной $x^2 - x$=2.

Решим уравнение, получим: x_1=2, x_2=-1.

Ответ: x_1=2, x_2=-1.

Пример:

Решить уравнение $\frac{3^{x+1}+1}{7}=\frac{4}{3^{x-2}}$

Так как 3^{x+1}=$3\bullet\ 3^x$, а 3^{x-2}=3^x:3^2, то получим: $\frac{3\bullet\ 3^x+1}{7}=\frac{4\bullet 9}{3^x}$.

Введем новую переменную: $u=3^x$

Получим уравнение: $\frac{3u\ \ +1}{7}=\frac{36}{u}$.

Решим уравнение, получим: u_1=9 и u_2=$-\frac{28}{3}$.

Вернёмся к исходной переменной: 3^x=9 и 3^x=$-\frac{28}{3}$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: **2**.

Пример:

Решить уравнение $(\log x^3)^2 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$. Приведём логарифмы к одному основанию :

$(\log x^3)^2 = (3 \log x\ )^2 = 9 \log\ {}^2 x$;

$\log_{0,1} 10x = \log_{(0,1)^{-1}}(10x)^{-1} = -\log_{10} 10x = -(\log 10 + \log x) = -(1 + \log x)$

Получаем: $9 \log\ {}^2 x$ - $(1 + \log x)$- *7=0*.

Введём новую переменную: $u = \log x$;

Получим: $9u^2 - u - 8 = 0$;

Решим уравнение, получим: u_1=*1 и* $u_2 = -\frac{8}{9}$.

Вернёмся к исходной переменной: $\log x$=*1,* $\log x = -\frac{8}{9}$.

Получим корни: x_1=*10,* $x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$.

Ответ: *10,* $10^{-\frac{8}{9}}$.

Пример:

Решить уравнение $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$
Перейдём к одной тригонометрической функции, к синусу: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x;$
Получаем уравнение: $1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$
Введем новую переменную: $\mathbf{u} = \sin \mathbf{x}$
Решим уравнение: $2u^2 + 5u + 2 = 0$, получим u_1=-2 и u_2=$-\frac{1}{2}$.
Вернёмся к исходной переменной: $\sin x$=$-\frac{1}{2}$ и $\sin x$=-2 .
Второе уравнение корней не имеет, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n.$
Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \epsilon Z.$

Функционально – графический метод:

- Графический подход. Уравнение f(x)=g(x) разделить на две функции y= f(x) и y= g(x). Построить их графики в одной координатной плоскости, найти их точки пересечения, указать их абсциссы.
- Функциональный подход. Можно обойтись без построения графиков, опираясь на свойства функций.

Пример:

Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Построим графики функций ***у***=$\sqrt{x}$ и ***у***=$|x - 2|$ в одной системе координат.

Они пересекаются в точках: ***А(1;1)*** и ***В(4;2)***

Значит, x_1=***1***, x_2= 4.

Ответ: ***1***, ***4***.

Пример:

Решить уравнение $\boldsymbol{x^5 + 5x - 42 = 0}$.

Очевидно что **x = 2**. Докажем, что это единственный корень уравнения.

Преобразуем уравнение: $\mathbf{x^5 = -5x + 42}$

Замечаем, что функция **y=**$\boldsymbol{x^5}$ - возрастает, а функция **y=**$\boldsymbol{-5x + 42}$ – убывает.

Следовательно уравнение имеет один корень.

Ответ: **2**.