



Общие  
методы  
решения  
уравнений



- Замена уравнения  $h(f(x))=h(g(x))$  уравнением  $f(x)=g(x)$ ;
- Метод разложения на множители;
- Метод введения новой переменной;
- Функционально-графический метод.

# Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$ :

- При решении показательных уравнений, когда переходим от уравнения  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) к уравнению  $f(x)=g(x)$ ;
- При решении логарифмических уравнений, когда переходим от уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  к уравнению  $f(x)=g(x)$ ;
- При решении иррациональных уравнений, когда переходим от уравнения  $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$  к уравнению  $f(x)=g(x)$ .

## Когда можно применять:

Только в том случае, когда  $y=h(x)$ - монотонная функция, которая каждое своё значение принимает по одному разу.

$y = x^7$  - возрастающая функция, поэтому от уравнения  $(2x + 2)^7 = (5x - 9)^7$  можно перейти к уравнению  $2x + 2 = 5x - 9$

$$x = \frac{11}{3}$$

## Когда нельзя применять:

Когда  $y=h(x)$ - немонотонная функция, возможна потеря корней.

Уравнение  $(2x + 2)^4 = (5x - 9)^4$  **нельзя** заменить уравнением  $2x + 2 = 5x - 9$  с корнем  $x = \frac{11}{3}$ . Потеряли корень  $x = 1$ .

Причина:  $y = x^4$  -немонотонная функция.

Уравнение  $\sin 17x = \sin 7x$  **нельзя** заменить уравнением  $17x = 7x$

# Метод разложения на множители:

Замена уравнения  $f(x)g(x)h(x)=0$   
совокупностью уравнений:

$$f(x)=0;$$

$$g(x)=0;$$

$$h(x)=0.$$

Все найденные корни проверить по ОДЗ  
исходного уравнения, посторонние  
отбросить.

# Пример:

Решить уравнение

$$(\sqrt{x+2} - 3)(2^{x^2+6x+5} - 1) \ln(x-8) = 0$$

Решить совокупность уравнений

$$\sqrt{x+2} - 3 = 0;$$

$$2^{x^2+6x+5} - 1 = 0;$$

$$\ln(x-8) = 0.$$

Получим корни:  $x_1=7$ ;  $x_2=-1$ ;  $x_3=-5$ ;  $x_4=9$ .

Проверим по ОДЗ исходного уравнения:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-8 > 0 \end{cases}$$

$x_1=7$ ;  $x_2=-1$ ;  $x_3=-5$  – посторонние корни

Ответ:  $x=9$ .

## Пример:

Решить уравнение  $x^3 - 7x + 6 = 0$

Представим слагаемое  $7x$  в виде  $x + 6x$

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0;$$

Сгруппируем 1 и 2 слагаемые и 3 с 4:

$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0;$$

Получим уравнение:  $(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$ ;

Решим совокупность:  $x - 1 = 0$  и  $x^2 + x - 6 = 0$

Получим корни:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -3$ .

Проверим корни : посторонних корней нет

Ответ: **1, 2, -3.**

# Метод введения новой переменной:

- ▣ Уравнение  $f(x)=0$  преобразовать к виду  $p(g(x))=0$ ;
- Ввести новую переменную  $u = g(x)$ ;
- Решить уравнение  $p(u)=0$ ;
- Решить совокупность уравнений  $g(x)=u_1; g(x)=u_2; \dots; g(x)=u_n$ , где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  - корни уравнения  $p(u)=0$ .

# Пример:

Решить уравнение  $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$

Введём новую переменную:  $u = x^2 - x$ ;

Получим уравнение:  $\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}$ ;

Выполним преобразования и получим уравнение:  
 $u^2 + 9u - 22 = 0$

Найдём корни уравнения:  $u_1 = 2$  и  $u_2 = -11$

Выполним проверку:  $u_2 = -11$  – посторонний корень.

Вернёмся к исходной переменной  $x^2 - x = 2$ .

Решим уравнение, получим:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ .

Ответ:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ .

# Пример:

Решить уравнение  $\frac{3^{x+1}+1}{7} = \frac{4}{3^{x-2}}$

Так как  $3^{x+1}=3 \cdot 3^x$ , а  $3^{x-2}=3^x:3^2$ , то получим:

$$\frac{3 \cdot 3^{x+1}}{7} = \frac{4 \cdot 9}{3^x}$$

Введем новую переменную:  $u = 3^x$

Получим уравнение:  $\frac{3u + 1}{7} = \frac{36}{u}$ .

Решим уравнение, получим:  $u_1=9$  и  $u_2=-\frac{28}{3}$ .

Вернёмся к исходной переменной:  $3^x=9$  и  $3^x=-\frac{28}{3}$ . Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: **2**.

# Пример:

Решить уравнение  $(\log x^3)^2 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$ . Приведём логарифмы к одному основанию:

$$(\log x^3)^2 = (3 \log x)^2 = 9 \log^2 x;$$

$$\log_{0,1} 10x = \log_{(0,1)^{-1}} (10x)^{-1} = -\log_{10} 10x = -(\log 10 + \log x) = -(1 + \log x)$$

$$\text{Получаем: } 9 \log^2 x - (1 + \log x) - 7 = 0.$$

Введём новую переменную:  $u = \log x$ ;

$$\text{Получим: } 9u^2 - u - 8 = 0;$$

Решим уравнение, получим:  $u_1 = 1$  и  $u_2 = -\frac{8}{9}$ .

Вернёмся к исходной переменной:  $\log x = 1$ ,  $\log x = -\frac{8}{9}$ .

Получим корни:  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$ .

Ответ:  $10$ ,  $10^{-\frac{8}{9}}$ .

## Пример:

Решить уравнение  $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$

Перейдём к одной тригонометрической функции, к синусу:  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$ ;

Получаем уравнение:  $1 - 2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$ .

Введём новую переменную:  $u = \sin x$

Решим уравнение:  $2u^2 + 5u + 2 = 0$ , получим  $u_1 = -2$  и  $u_2 = -\frac{1}{2}$ .

Вернёмся к исходной переменной:  $\sin x = -\frac{1}{2}$  и  $\sin x = -2$ .

Второе уравнение корней не имеет,  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ .

Ответ:  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

# Функционально – графический метод:

- Графический подход. Уравнение  $f(x)=g(x)$  разделить на две функции  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$ . Построить их графики в одной координатной плоскости, найти их точки пересечения, указать их абсциссы.
- Функциональный подход. Можно обойтись без построения графиков, опираясь на свойства функций.

## Пример:

Решить уравнение  $\sqrt{x} = |x - 2|$ .

Построим графики функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = |x - 2|$  в одной системе координат.

Они пересекаются в точках: **A(1;1)** и **B(4;2)**

Значит,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ .

Ответ: **1, 4**.

## Пример:

Решить уравнение  $x^5 + 5x - 42 = 0$ .

Очевидно что  $x = 2$ . Докажем, что это единственный корень уравнения.

Преобразуем уравнение:  $x^5 = -5x + 42$

Замечаем, что функция  $y = x^5$  - возрастает, а функция  $y = -5x + 42$  - убывает.

Следовательно уравнение имеет один корень.

Ответ: **2**.