Общие методы решения уравнений

- Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$;
- Метод разложения на множители;
- Метод введения новой переменной;
- Функционально- графический метод.

Замена уравнения h(f(x))=h(g(x)) уравнением f(x)=g(x):

- При решении показательных уравнений, когда переходим от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (a>0, a≠1) к уравнению **f(x)=g(x)**;
- При решении логарифмических уравнений, когда переходим от уравнения $log_a f(x) = log_a g(x)$ к уравнению **f(x)=g(x)**;
- При решении иррациональных уравнений, когда переходим от уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению **f(x)=g(x)**.

Когда можно применять:

Только в том случае, когда y=h(x)- монотонная функция, которая каждое своё значение принимает по одному разу.

$\boldsymbol{y = x^7}$- возрастающая функция, поэтому от уравнения $(\boldsymbol{2x+2})^{\boldsymbol{7}} = (\boldsymbol{5x-9})^{\boldsymbol{7}}$ можно перейти к уравнению **2x + 2 = 5x – 9**

$$\boldsymbol{x = \frac{11}{3}}$$

Когда нельзя применять:

Когда y=h(x)- немонотонная функция, возможна потеря корней.

Уравнение $(2x+2)^4 = (5x-9)^4$ нельзя заменить уравнением **2x + 2 = 5x – 9** с корнем $x = \frac{11}{3}$. Потеряли корень x = 1.

Причина: $y = x^4$ -немонотонная функция.

Уравнение $\sin 17x = \sin 7x$ нельзя заменить уравнением ***17x = 7x***

Метод разложения на множители:

Замена уравнения **f(x)g(x)h(x)=0** совокупностью уравнений:

$$f(x)=0;$$

$$g(x)=0;$$

$$h(x)=0.$$

Все найденные корни проверить по ОДЗ исходного уравнения, посторонние отбросить.

Пример:

Решить уравнение

$$(\sqrt{x+2}-3)(2^{x^2+6x+5}-1)\,ln(x-8)=0$$

Решить совокупность уравнений

$\sqrt{x+2}-3=0;$

$2^{x^2+6x+5}-1=0;$

$ln(x-8)=0.$

Получим корни: x_1=7; x_2=-1; x_3=-5; x_4=9.

Проверим по ОДЗ исходного уравнения:

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-8>0 \end{cases}$$

x_1=7; x_2=-1; x_3=-5 – посторонние корни

Ответ: **x =9.**

Пример:

Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$

Представим слагаемое **7x** в виде **x +6x**

$x^3 - x - 6x + 6 = 0;$

Сгруппируем 1 и 2 слагаемые и 3 с 4:

$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0;$

Получим уравнение:$(\mathrm{x} - 1)(x^2 + \mathrm{x} - 6) = 0;$

Решим совокупность: $\mathrm{x} - 1=0$ **и** $x^2 + \mathrm{x} - 6=0$

Получим корни: x_1**=1,** x_2**=2,** x_3**=-3.**

Проверим корни : посторонних корней нет

Ответ: **1, 2, -3.**

Метод введения новой переменной:

- Уравнение ***f(x)=0*** преобразовать к виду ***p(g(x))=0***;
- Ввести новую переменную $\boldsymbol{u}$ **=*g(x)***;
- Решить уравнение ***p*($\boldsymbol{u}$)=0**;
- Решить совокупность уравнений **g(x)=$\boldsymbol{u_1}$; g(x)=$\boldsymbol{u_2}$;…; g(x)=$\boldsymbol{u_n}$**, где u_1, u_2,…, u_n- корни уравнения p(u)=0.

Пример:

Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$

Введём новую переменную: $u = x^2 - x$;

Получим уравнение: $\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}$;

Выполним преобразования и получим уравнение: $u^2 + 9u - 22 = 0$

Найдём корни уравнения: u_1=2 и u_2=-11

Выполним проверку :u_2=-11 – посторонний корень.

Вернёмся к исходной переменной $x^2 - x$=2.

Решим уравнение, получим: x_1=2, x_2=-1.

Ответ: x_1=2, x_2=-1.

Пример:

Решить уравнение $\frac{3^{x+1}+1}{7}=\frac{4}{3^{x-2}}$

Так как $3^{x+1}=3\cdot 3^{x}$, а $3^{x-2}=3^{x}:3^{2}$, то получим:

$\frac{3\cdot 3^{x}+1}{7}=\frac{4\cdot 9}{3^{x}}$.

Введем новую переменную: $u=3^{x}$

Получим уравнение: $\frac{3u+1}{7}=\frac{36}{u}$.

Решим уравнение, получим: $u_1=9$ и $u_2=-\frac{28}{3}$.

Вернёмся к исходной переменной: $3^{x}=9$ и $3^{x}=-\frac{28}{3}$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: **2**.

Пример:

Решить уравнение $(\log x^3)^2 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$. Приведём логарифмы к одному основанию :

$(\log x^3)^2 = (3 \log x)^2 = 9 \log^2 x$;

$\log_{0,1} 10x = \log_{(0,1)^{-1}} (10x)^{-1} = -\log_{10} 10x = -(\log 10 + \log x) = -(1 + \log x)$

Получаем: $9 \log^2 x - (1 + \log x) - 7 = 0$.

Введём новую переменную: $u = \log x$;

Получим: $9u^2 - u - 8 = 0$;

Решим уравнение, получим: $u_1 = 1$ и $u_2 = -\frac{8}{9}$.

Вернёмся к исходной переменной: $\log x = 1$, $\log x = -\frac{8}{9}$.

Получим корни: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$.

Ответ: 10, $10^{-\frac{8}{9}}$.

Пример:

Решить уравнение $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

Перейдём к одной тригонометрической функции, к синусу: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x;$

Получаем уравнение: $1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$

Введем новую переменную: $\mathbf{u} = \sin \mathbf{x}$

Решим уравнение: $2u^2 + 5u + 2 = 0$, получим u_1=-2 и u_2=$-\frac{1}{2}$.

Вернёмся к исходной переменной: $\sin x$=$-\frac{1}{2}$ и $\sin x$=-2 .

Второе уравнение корней не имеет, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n.$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \epsilon Z.$

Функционально – графический метод:

- Графический подход. Уравнение f(x)=g(x) разделить на две функции y= f(x) и y= g(x). Построить их графики в одной координатной плоскости, найти их точки пересечения, указать их абсциссы.
- Функциональный подход. Можно обойтись без построения графиков, опираясь на свойства функций.

Пример:

Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Построим графики функций **y=**$\sqrt{x}$ и **y=**$|x - 2|$ в одной системе координат.

Они пересекаются в точках: ***A(1;1)*** и ***B(4;2)***

Значит, x_1**=*1*,** x_2**= 4**.

Ответ: ***1, 4***.

Пример:

Решить уравнение $x^5 + 5x - 42 = 0$.

Очевидно что **x = 2**. Докажем, что это единственный корень уравнения.

Преобразуем уравнение: $\mathbf{x^5 = -5x + 42}$

Замечаем, что функция $y = x^5$ - возрастает, а функция $y = -5x + 42$ – убывает.

Следовательно уравнение имеет один корень.

Ответ: **2**.