РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

Автор: Чекушкина Галина Викторовна,
учитель математики МОУ
Новоалгашинская СОШ

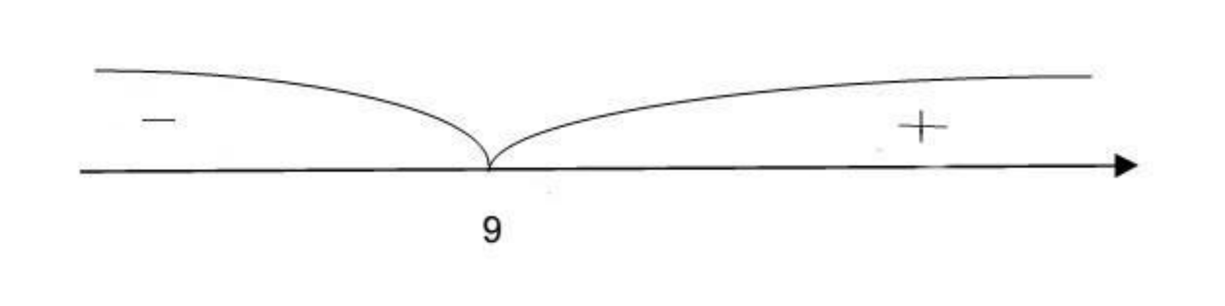
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

- Находим область определения функции
- Нули функции, которые разбивают область определения на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция определена, непрерывна и сохраняет знак.
- Для определения знака функции на конкретном промежутке находим знак в любой удобной точке этого промежутка.
- Иллюстрацию изменения знаков функции осуществляют с помощью координатной прямой.

I. Примеры решения иррациональных неравенств.

Пример 1. $\sqrt{x} \le 3$

Введем функцию $f(x) = \sqrt{x}-3$. Необходимо определить промежутки, на которых $f(x) \le 0$. Очевидно, что $D(f) =[0; \infty)$. Нули функции: $x = 9$.



$f(16)>0$, $f(4)<0$.

Ответ запишем, учитывая область определения функции. Ответ: [0;9]

Пример 2. $\sqrt{x+18} < 2 - x$

Традиционное решение неравенства сводится к решению системы неравенств

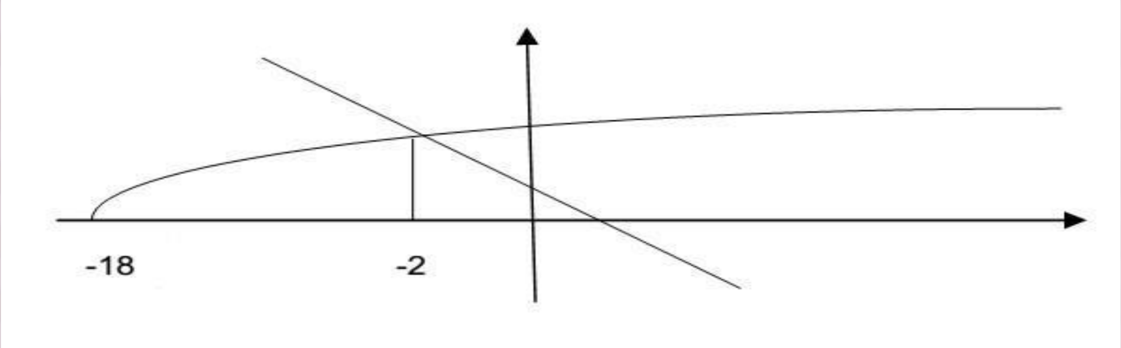
$$\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 0 \le x + 18 < (2 - x)^2 \end{cases}$$

Решая систему, получим $-18 \le x < -2$

Графическое решение неравенства $\sqrt{x+18} < 2 - x$

Если заметить, что $f(x) = \sqrt{x+18}$

функция возрастающая на луче [- 18; ∞),
g(x) = 2 - x – убывающая на **R,**
x = - 2 – абсцисса их точки пресечения,
то ответ [-18;-2).
Схематическое построение графиков даёт наглядный ответ



Решение методом интервалов $\sqrt{x+18} < 2 - x$

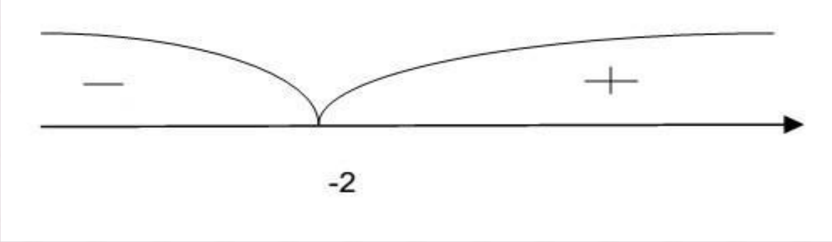
Пусть $f(x) = \sqrt{x+18} + x - 2$

Решим неравенство f(x) < 0

D (f) = [-18; ∞)

Нули функции найдем, решив уравнение

$\sqrt{x+18} = 2 - x$ x = - 2



Ответ запишем, учитывая область определения функции. Ответ: [-18;-2).

Пример 3 $\sqrt{21x+16}-\sqrt{x-4}<20$

Область допустимых значений определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 21x+16 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4$$

Для функции

$$f(x)=\sqrt{21x+16}-\sqrt{x-4}-20 \quad D(f)=[4;\infty).$$

Далее находим нули функции

$$\sqrt{21x+16}=\sqrt{x-4}+20$$

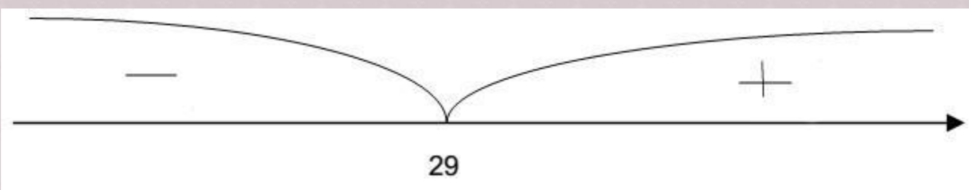
$$21x+16 = 400 + 40\sqrt{x-4} + x - 4,$$

$$x - 19 = 2\sqrt{x-4} \ (x \geq 19),$$

$$x^2 - 38x + 361 = 4x - 16,$$

$$x^2 - 42x + 377 = 0$$

откуда $x=29$ и $x=13$ - посторонний корень.



Ответ запишем, учитывая область определения функции. Ответ: [4; 29)

II. Примеры решения показательных неравенств

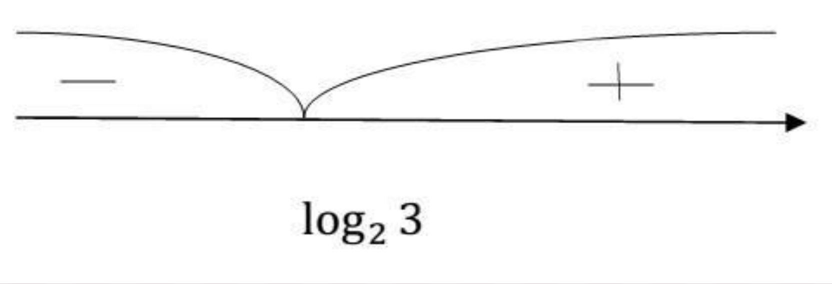
Пример 1. $4^x < 2^{x+1} + 3$

Если f(x)= $4^x - 2 \cdot 2^x - 3$, то D (f) =**R**

и необходимо решить неравенство $f(x) < 0$

Найдем нули функции $4^x - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$,

откуда $2^x = 3$, $x = \log_2 3$.



Ответ: $(-\infty; \log_2 3)$

Пример 2.

$$4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$$

Решаем неравенство $f(x) \leq 0$

$D(f) = (-\infty;0) \cup (0; \infty)$.

Для нахождения нулей функции

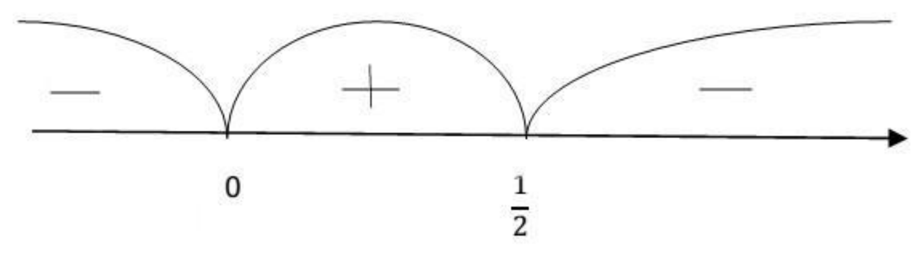
решаем уравнение $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3=0$

Полагая $2^{\frac{1}{x}-1}=t$, где $t>0$,

приходим к уравнению $t^2 - \frac{1}{2}\,t - 3 = 0$

с положительным корнем $t=2$.

Следовательно, $2^{\frac{1}{x}-1}=2$ и $x=\frac{1}{2}$.



Ответ: $(-\infty;0)\cup[\frac{1}{2};\infty)$

III. Примеры решения логарифмических неравенств методом интервалов

Пример 1 $lg^2x - 2lg\,x - 8 \leq 0$

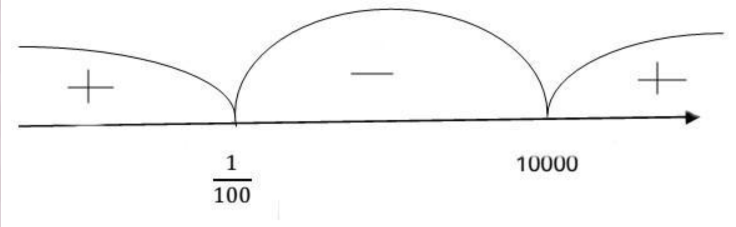
$f(x) = lg^2x - 2lg\,x - 8$, $D(f) = (0; \infty)$

Для нахождения нулей функции решим уравнение

$lg^2x - 2lg\,x - 8 = 0$, откуда

$\lg x = -2, \lg x = 4,$

$x = \frac{1}{100}$, x=10000



Ответ: $(\frac{1}{100}; 10000)$

Пример 2

$$\log_{0,3}(x^2\text{-x-}20) - \log_{0,3}(x+4)>0$$

Найдем область определения функции f

в левой части неравенства, решив систему неравенств

$$\begin{cases}(x-5)(x+4)>0\\ x+4>0\end{cases} \Rightarrow x>5$$

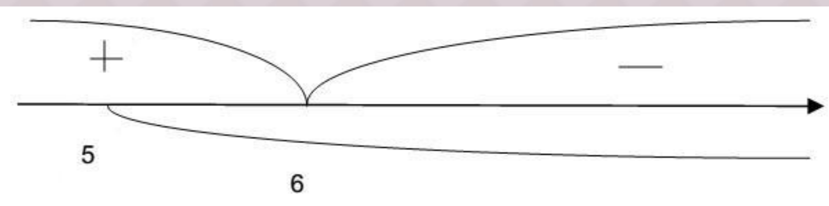
Решая уравнение $\log_{0,3}(x^2 - x - 20) - \log_{0,3}(x + 4) = 0$,

находим нули функции f

$x^2 - x - 20 = x + 4$

$x^2 - 2x - 24 = 0$,

x= - 4 - посторонний корень и x=6



Ответ: (5;6)

IV. Примеры на применение метода интервалов к неравенствам, содержащим знак модуля

Пример 1 $x^2 > |5x+6|$

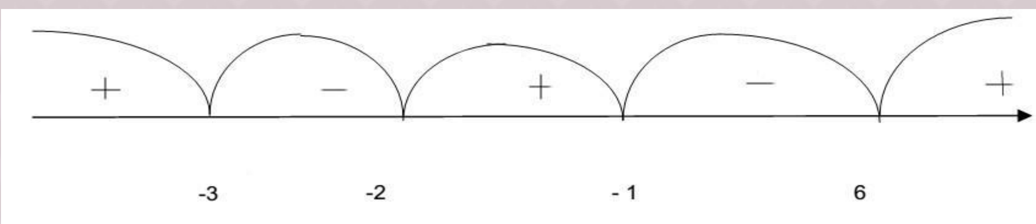
Функция $f(x) = x^2 - |5x+6|$ определена при любом x

Найдем её нули, решив уравнение $x^2 = |5x+6|$,

откуда $x^2 = 5x+6$ или $x^2 = -(5x+6)$,

$x^2 - 5x - 6 = 0$ или $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Корни этих уравнений -1, 6, -2, -3.



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (6; +\infty)$

Пример 2

$y^2 - 4\,|y| < 12$

Положим $f(y)=y^2 - 4\,|y| - 12$.

Заметим, что $D(y)=\mathbf{R}$ и

найдем нули функции $y^2 - 4\,|y| - 12=0$,

откуда $|y|=6$, $|y|= -2$,

последнее уравнение корней не имеет.

Ответ: $-6<y<6$

Реши методом интервалов

1. $\sqrt{6x+1}-\sqrt{x-3}\geq\sqrt{3x+4}$ Ответ: $[3; 4]$

2. $9^x < 3^x + 2$ Ответ: $(-\infty; \log_3 2)$

3. $\sqrt{\log_{10} x}+\sqrt{25-\log_{10} x}\leq 7$ Ответ: $[1; 10^9] \cup [10^{16}; 10^{25}]$

4. $|x - 6| > x^2 - 5x + 9$ Ответ: $(1; 3)$