

Свойства логарифмов

*гимназия 64
учитель математики
Котельникова Н. В.*

Определение. Логарифмом числа b по основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

$$a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

- основное
логарифмическое
тождество

$$\log_a b = x$$

$$\log_a a^p = p,$$

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

Формулы действий с логарифмами (свойства).

$a, b, x, y > 0, a \neq 1$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ – логарифм произведения;

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ – логарифм частного;

$\log_a (b^p) = p \log_a b$ – логарифм степени;

$\log_{(a^q)}(x^p) = \frac{p}{q} \log_a x$ ($q \neq 0$);

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ – формула перехода к новому основанию,

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. $a, b, x > 0, a \neq 1, b \neq 1.$

Стандартный способ решения *логарифмических уравнений и неравенств* основан на монотонности логарифмической функции, - правило "отбрасывания" логарифмов:

1) пусть $a > 1$, тогда уравнение или неравенство $\log_a f \vee \log_a g$ равносильно

системе
$$\begin{cases} f \vee g \\ f, g > 0 \end{cases}$$

2) пусть $0 < a < 1$, тогда знак \vee меняется на противоположный.

Чтобы отбросить логарифмы в уравнении или неравенстве $\log_a f \vee g$, его правую часть можно представить в нужном виде с помощью тождества $g = \log_a(a^g)$

К неравенствам вида $\log_a f - \log_a g$ применим метод замены множителя:

пусть $a > 1$, тогда $\log_a f - \log_a g$ заменяют множителем $f - g$ того же знака при дополнительных условиях $f, g > 0$.

Важный случай: $g=1$: при $a > 1$ множитель $\log_a f$ можно заменить на $f-1$ при $f > 0$.

В случае $0 < a < 1$

$\log_a f - \log_a g$ заменяют множителем $g - f$ при $f, g > 0$,

а множитель $\log_a f$ противоположным множителем $1 - f$, $f > 0$.

Только на «ОДЗ»

$\log_u f - \log_u g$	$(u - 1)(f - g)$
$\log_u f - 1$	$(u - 1)(f - u)$
$\log_u f$	$(u - 1)(f - 1)$
$\log_u f - \log_g f$	$(f - 1)(u - 1)(g - 1)(g - u)$
$u^f - u^g \quad (u > 0)$	$(u - 1)(f - g)$
$u^f - 1$	$(u - 1)f$
$u^f - g^f$ $(u > 0, g > 0)$	$(u - g)f$
$ p - q $	$(p - q)(p + q)$