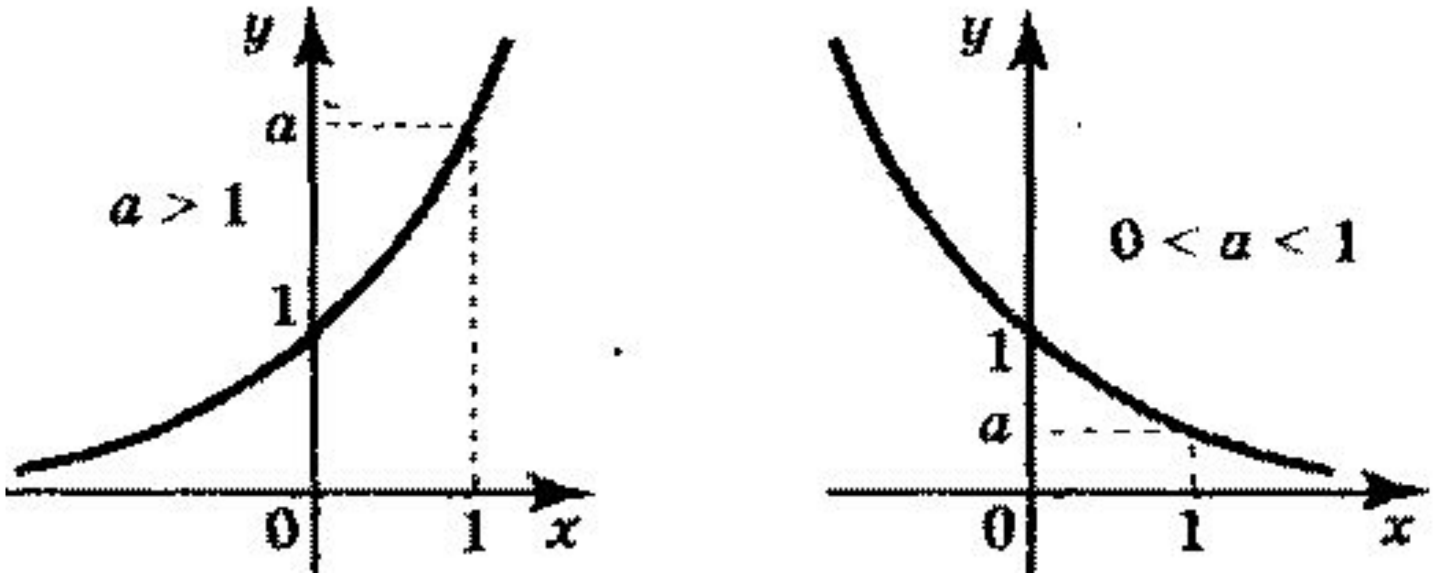
Решение показательных неравенств

План урока

- 1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.
- 2. Неравенства вида $a^{f(x)}>b$, $a>0$.
- 3.Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$.
- 4.Решение показательных неравенств методом замены переменной.
- 5.Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций.
- 6.Графическое решение показательных неравенств

Функцию вида $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$ называют **показательной функцией**

$$y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$$



Первое замечание

Сравните:

Показательная функция	Степенная функция
$y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$) Аргумент x содержится в показателе степени	$y=x^n$ Аргумент x содержится в основании степени
$y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=(2{,}5)^x$	$y=x^3$, $y=x^{1{,}5}$, $y=x^{\frac{1}{3}}$, $y=x^{-10}$

Второе замечание

Обычно не рассматривают показательную функцию с основаниями:

- $a=1$, т.к. $1^x=1$, т.е. показательная функция «вырождается» в постоянную функцию $y=1$- это неинтересно;
- если $a=0$, то $0^x=0$ для любого положительного значения x, т.е. мы получаем функцию $y=0$, определённую при $x>0$, - это тоже неинтересно;
- если $a<0$, то выражение а имеет смысл лишь при целых значениях x, а мы всё-таки предпочитаем рассматривать функции, определённые на сплошных промежутках

Основные свойства показательной функции $y=a^x$

№	a>1	0<a<1
1.	$D(f)=(-\infty;+\infty)$	$D(f)=(-\infty;+\infty)$
2.	$E(f)=(0;+\infty)$	$E(f)=(0;+\infty)$
3	Возрастает	Убывает
4.	Непрерывна	Непрерывна

График показательной функции $y=a^x$

$a>1$

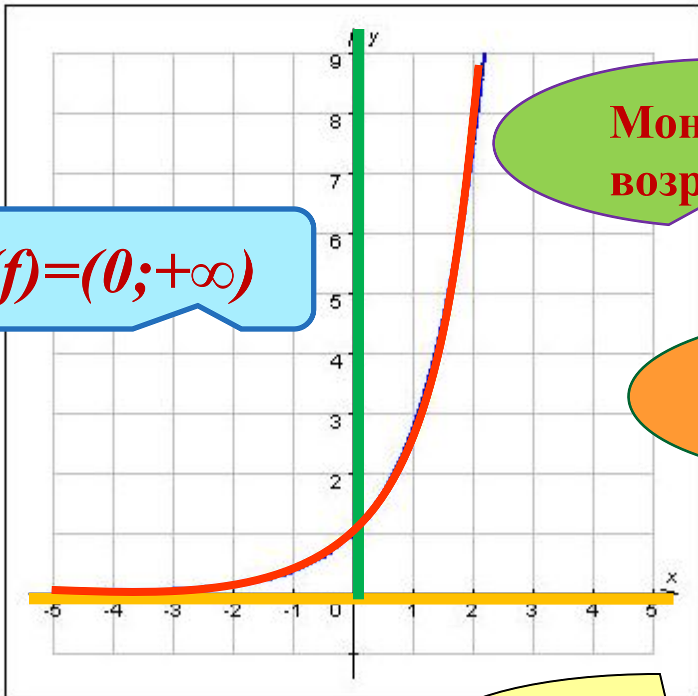


рис.1

E(f)=(0;+∞)

Монотонно возрастает

D(f)=(-∞;+∞)

$0<a<1$

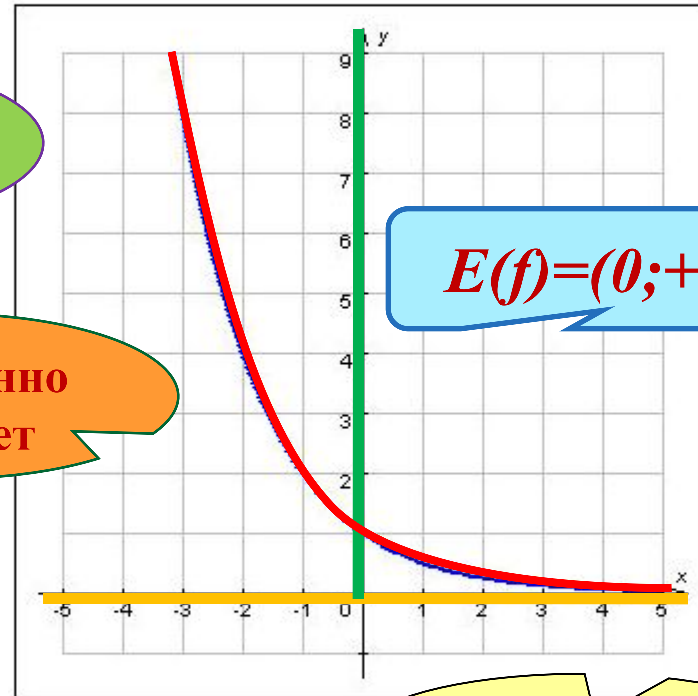


рис.2

E(f)=(0;+∞)

Монотонно убывает

D(f)=(-∞;+∞)

Кривую, изображённую на рис.1 или 2, называют экспонентой. Обратите внимание на геометрическую особенность показательной функции $y=a^x$: ось x является **горизонтальной асимптотой** графика

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называют **показательными**

1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение неравенств подобного вида основано на следующих утверждениях:

если $a>1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)>g(x)$;

если $0<a<1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)<g(x)$.

Кратко можно записать:

$$a>1 \Rightarrow (a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x));$$

$$0<a<1 \Rightarrow (a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) <g(x)).$$

Применяя какой -либо метод при решении неравенства, содержащего знак >, этот же метод можно применять и при решении неравенств, содержащих знаки<, ≤, ≥. В частности, можно, например, записать:

$$0<a<1 \Rightarrow (a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\ge g(x))$$

Задания ЕГЭ 2009 г.

А.6. Решите неравенство: $7^{x+2,3} \le \frac{1}{49}$.

1.(-∞; 0,3] *2.(-∞; -4,3]* *3.[-4,3; +∞)* *4.[0,3; +∞)*

Решение:

Поскольку $\frac{1}{49} = 7^{-2}$, то имеем $7^{x+2,3} \le 7^{-2}$.

Т.к. основание степени равно 7 и оно больше 1,

это неравенство равносильно неравенству того же смысла:

$x+2,3 \le -2$, $x \le -2-2,3$, $x \le -4,3$.

Правильный ответ: ***2***

А.6. Решите неравенство: $3^{7x-9} \le 81^x$.

1. $(-\infty; 1{,}5]$ 2. $(-\infty; \frac{9}{8}]$ 3. $(-\infty; 1]$ 4. $(-\infty; 3]$

Решение:

$81=3^4$,

при возведении степени в степень показатели перемножаются.

Получаем: $81^x=3^{4x}$.

Исходное неравенство запишем в виде: $3^{7x-9} \le 3^{4x}$.

Основание степени больше 1,

поэтому неравенство равносильно неравенству того же смысла:

$7x-9\le4x$, $7x-4x\le9$, $3x\le9$, $x\le3$.

Правильный ответ: ***4***

А.6. Решите неравенство: $(\frac{1}{3})^{2-5x} - 1 \le 0$.

1.$(-\infty;\ \frac{2}{5})$ 2.$(-\infty; \frac{2}{5}]$ 3.$(\frac{1}{5};\ +\infty)$ 4.$[\frac{2}{5};\ +\infty)$

Решение:

Перенесём -1 с противоположным знаком в правую часть неравенства:

$(\frac{1}{3})^{2-5x} \le 1$.

Учитывая, что $1=(\frac{1}{3})^0$, имеем $(\frac{1}{3})^{2-5x} \le (\frac{1}{3})^0$.

Основание степени равно $\frac{1}{3}$, и оно больше 0, но меньше 1.

Тогда исходное неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $2-5x \ge 0$.

Перенесём 2 в правую часть неравенства с противоположным знаком:

$-5x \ge -2$.

Разделим обе части на -5, при этом заменим знак неравенства на противоположный:

$x \le \frac{2}{5}$.

Учитываем, что это нестрогое неравенство и включает $\frac{2}{5}$.

Правильный ответ: 2

А.9. Решите неравенство: $2^{x^2-5x+6} \leq 4^x$.

1.[1;6]   *2.[2;3]*   *3.(-∞;2]U[3; +∞)*   *4. (-∞;1]U[6; +∞)*

Решение:

Поскольку $4^x = 2^{2x}$, получим: $2^{x^2-5x+6} \leq 2^{2x}$.

Т.к. основание степени равно 2 и оно больше 1, то это неравенство равносильно неравенству того же смысла:

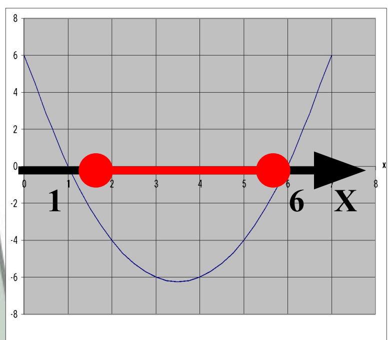
$$x^2 - 5x + 6 \leq 2x.$$

Перенесём 2x из правой части неравенства в левую с противоположным знаком:

$$x^2 - 5x + 6 - 2x \leq 0,$$

приведём подобные члены:

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0.$$



Рассмотрим функцию $y = x^2 - 7x + 6$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Выясним, как расположена эта парабола относительно оси x. Для этого решим уравнение $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Получим: $x_1 = 6$, $x_2 = 1$.

Значит, парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны 1 и 6. Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости.

Из рисунка видно, что функция принимает неположительные значения на [1;6].

Правильный ответ: *1*

Задания для самостоятельного решения

Решите неравенства:

№1. $4 \geq 16^{x+1}$

1.(-∞; 1,5] *2.(-∞; -о,5]* *3.[1,5; +∞)* *4.[-0,5; +∞)*

№2. $5^{x} \geq \frac{1}{125}$

1.[0,5; +∞) *2. (-∞; -6,5]* *3. (-∞; 7]* *4.[-6,5; +∞)*

№3. $0{,}7^{5x+1} \geq 0{,}7^{2x-9}$

1. $(-\infty; -\frac{4}{3}]$ *2.* $[-\frac{3}{4}; +\infty)$ *3.* $(-\infty; -\frac{2}{7}]$ *4.* $[-\frac{4}{3}; +\infty)$

№4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0{,}04$

1.(-∞; 3) *2.* $(-\infty; \frac{5}{3})$ *3.(3; +∞)* *4* $(-\infty; -\frac{5}{3})$

№5. $3^{3x-2} \geq \frac{1}{9}$

1.(0;+∞) *2.(-∞; 0)* *3.[0; +∞)* *4.(-∞;0]*

№6. $3^{2x-1} \geq \frac{1}{9}$

1.(-0,5;+∞) *2.(-∞; -0,5)* *3.[-1,5; +∞)* *4.[-0,5; +∞)*

№7. $0{,}2^{x^2-x-2} \leq 0{,}2^{x-3}$

1.(1;+∞) 2.(-∞ ; +∞) 3.(-∞;1) 4.[-1;1]

Ответы к заданиям:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер верного ответа	2	4	1	1	3	4	2

Применение решений показательных неравенств данного типа встречается в заданиях на нахождение области определения и на нахождение множества значений

Примеры:

Найдите область определения функции:

а) $g(x)=\ln\left(9^{1,5-0,3x}-\frac{1}{27}\right)$

1.(10;+∞) 2.(- ∞;10) 3. (0;10] 4.(- ∞;0)

Для решения данного примера воспользуемся областью определения логарифмической функции.

$$9^{1,5-0,3x}-\frac{1}{27}>0.$$

Получили показательное неравенство, решение которого приводилось выше.

Правильный ответ: ***2.***

б) $f(x)=\sqrt{2^{3x+1}-16}$

1.(1;+∞) 2.(-∞;-1] 3. (-∞ ; -1) 4.[1;+∞)

Т.к. областью определения арифметического квадратного корня является множество неотрицательных чисел, то решение сводится к решению показательного неравенства: $2^{3x+1}-16\geq0$.

Правильный ответ: ***4.***

Укажите множество значений функции $y=2^x+5$.

1.(5;+∞;) 2.(0;+∞) 3.(-∞;+∞) 4.(7;+∞;)

Множество значений показательной функции $y=2^x$ - все положительные числа.

$2^x>0$, $2^x+5>5$.

Правильный ответ: ***1***

2. Неравенства вида $a^{f(x)}>b$, $a>0$.

а) $b\le 0$, тогда $a^{f(x)}>b \iff x \in D(f)$;

б) $b>0$, тогда $a^{f(x)}>b \iff$
$f(x)>\log_a b$ при $a>1$;

$a^{f(x)}>b \iff$
$f(x)<\log_a b$ при $0<a<1$

Пример 1:

Решите неравенство: $(\frac{1}{2})^x > -1$.

Решение:

Т.к. $(\frac{1}{2}) > 0$ при x€R, то $(\frac{1}{2})^x > -1$, <=> x€R

Ответ: x€R.

Пример 2:

Решите неравенство: $2^x > 5$.

Решение:

$2^x > 5 \iff 2^x > 2^{\log_2 5} \iff x > \log_2 5$.

Ответ: $(\log_2 5; ;+\infty)$.

Пример 3:

Решите неравенство: $(\frac{1}{2})^{3x} \geq 3$.

Решение:

$(\frac{1}{2})^{3x} \geq (\frac{1}{2})^{\log_{\frac{1}{2}} 3} \iff 3x \leq \log_{\frac{1}{2}} 3 \iff x \leq \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 3 \iff x \leq \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}$

Ответ: $(-\infty; \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}]$

Из заданий ЕГЭ 2006 г.

Пример:

Решите неравенство: $10^{4x-5} > -0{,}1$

1.(-∞;+∞) *2.(-1;+∞)* *3.(-∞;1)* *4.(1;+∞;)*

Правильный ответ: ***1***

3.Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \iff f(x) > g(x)\log_a b$, если $a>1$;

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \iff f(x) < g(x)\log_a b$, если $0< a<1$

Пример:

Решите неравенство: $2^x \geq 3^{x^2}$.

Решение:

Прологарифмируем обе части исходного неравенства по основанию 2.

Тогда имеем: $2^x \geq 3^{x^2}$;

$$\log_2 (2^x) \geq \log_2 (3^{x^2});$$
$$x \geq x^2 \log_2 3;$$
$$x - x^2 \log_2 3 \geq 0;$$
$$x(1 - x \log_2 3) \geq 0;$$
$$x € \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right]$$

Ответ : $[0; \log_3 2]$

4.Решение показательных неравенств методом замены переменной

Пример:

Решите неравенство: $9^x + 27<12*3^x$.

Решение:

Пусть $3^x=t$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$t^2 -12t+27<0;$$

$$3<t<9;$$

$$3<3^x <9;$$

$$3^1 <3^x <3^2 ;$$

$$1<x<2.$$

Ответ : ***(1;2)***

5.Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

Пример:

Решите неравенство: $4^x-2*5^{2x}-10^x>0$.

Решение:

Исходное неравенство можно записать в виде $4^x-2*5^{2x}-2^x*5^x>0$;

В левой части – однородные функции относительно 2^x и 5^x .

Разделив обе части исходного неравенства на 5^{2x} , получаем:

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0;$$

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0.$$

Обозначив $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, получаем $t^2-t-2>0$;

$t<-1,\ t>2.$

Поскольку $t>0 \Rightarrow t>2$ и исходное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2;\ \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2};$$

$$x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

Ответ :

$(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2)$

6. Неравенства, в которых в одной части неравенства содержится показательная функция, а в другой - любая другая

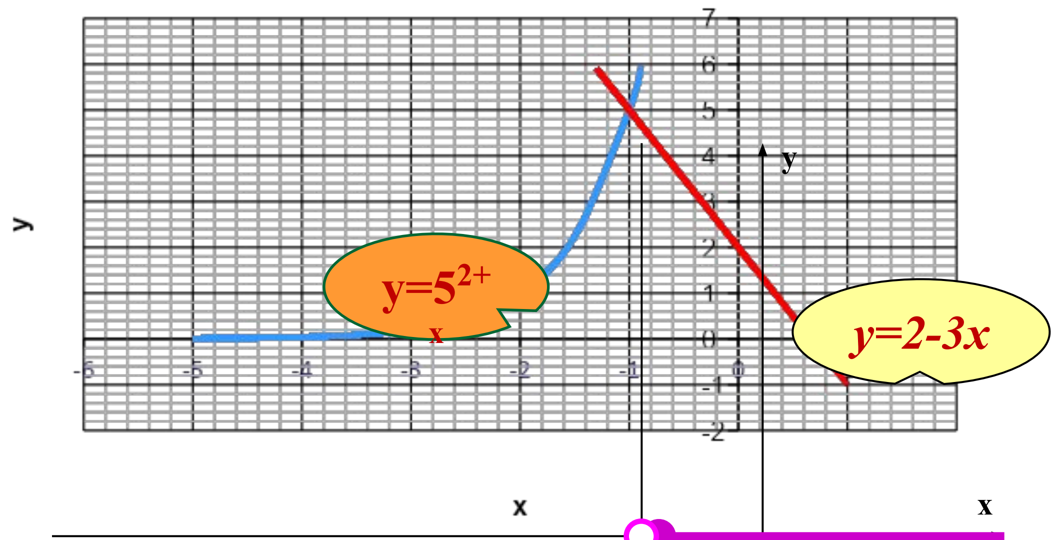
Решите неравенство: $5^{2+x} > 2-3x$.

1.(-∞; +∞) *2.(1; +∞)* *3.(-∞;-1)* *4(-1;+∞)* .

Решение:

Такое неравенство решаем графически. Построим графики функций

$y=5^{2+x}$ и $y=2-3x$.



Правильный ответ:

4

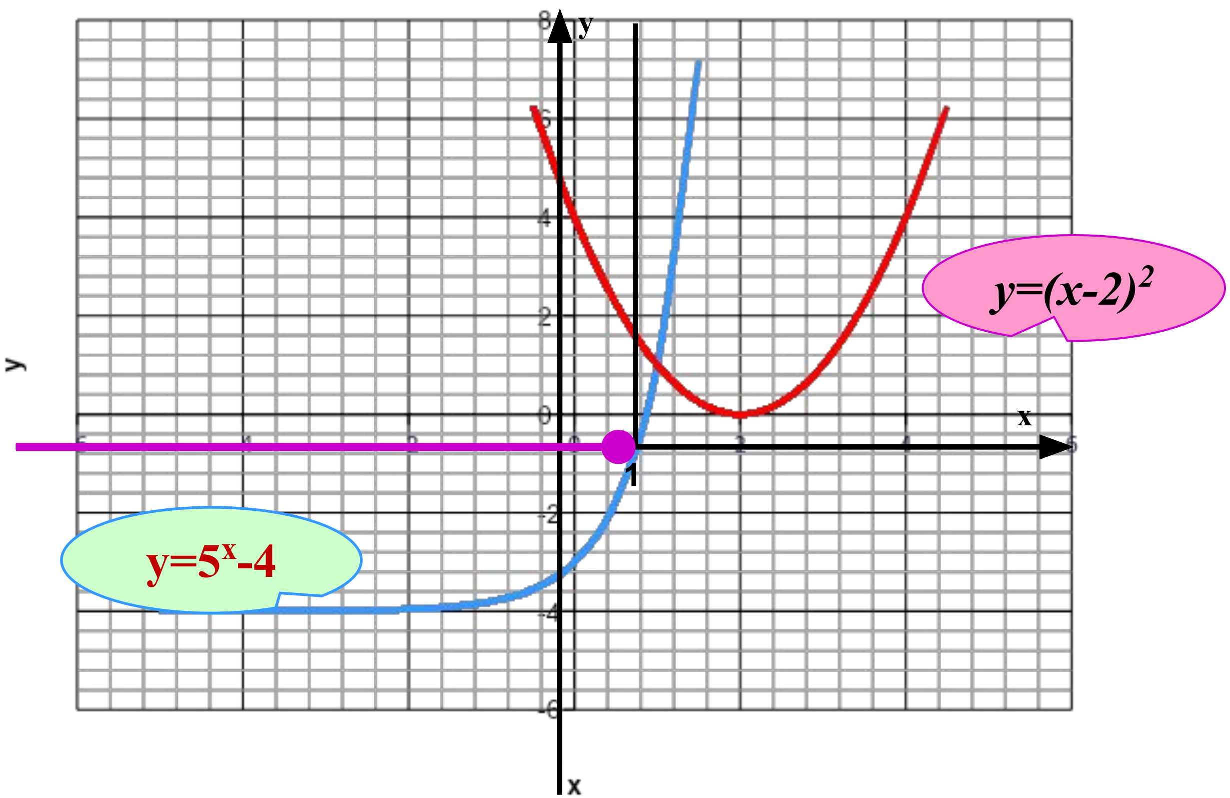
Решите неравенство: $5^x-4 \le (x-2)^2$.

1.(-1;3] *2.(-∞;1]* *3. [3 ; 7]* *4.[1;+∞)*

Решение:

Такое неравенство решаем графически. Построим графики функций

$y = 5^x-4$ и $y = (x-2)^2$.



Правильный ответ: *2*

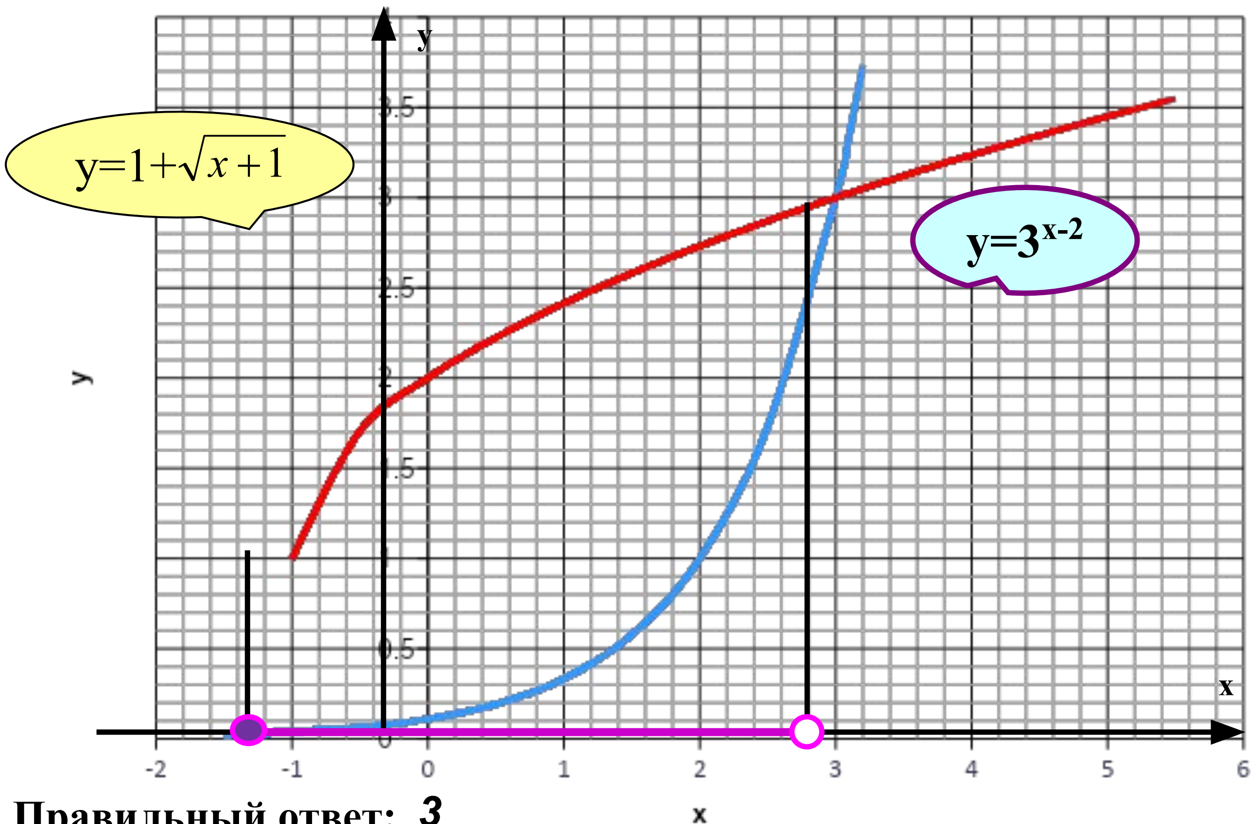
Решите неравенство: $3^{x-2} < 1+\sqrt{x+1}$.

1.(0;7) *2.(-3;1)* *3. [-1;3)* *4(3;+∞)* .

Решение:

Такое неравенство решаем графически. Построим графики функций

$y= 3^{x-2}$ и $y= 1+\sqrt{x+1}$.



Правильный ответ: *3*