

**Определенный  
интеграл.**

**Нахождение площадей  
фигур с помощью  
определенного  
интеграла**

**Н.И. Лобачевского:  
«Нет ни одной области  
математики, как бы  
абстрактна она ни была,  
которая когда-нибудь не  
окажется применимой  
к явлениям действительного  
мира.»**

1

D

5

D

2

A

6

B

3

D

7

B

4

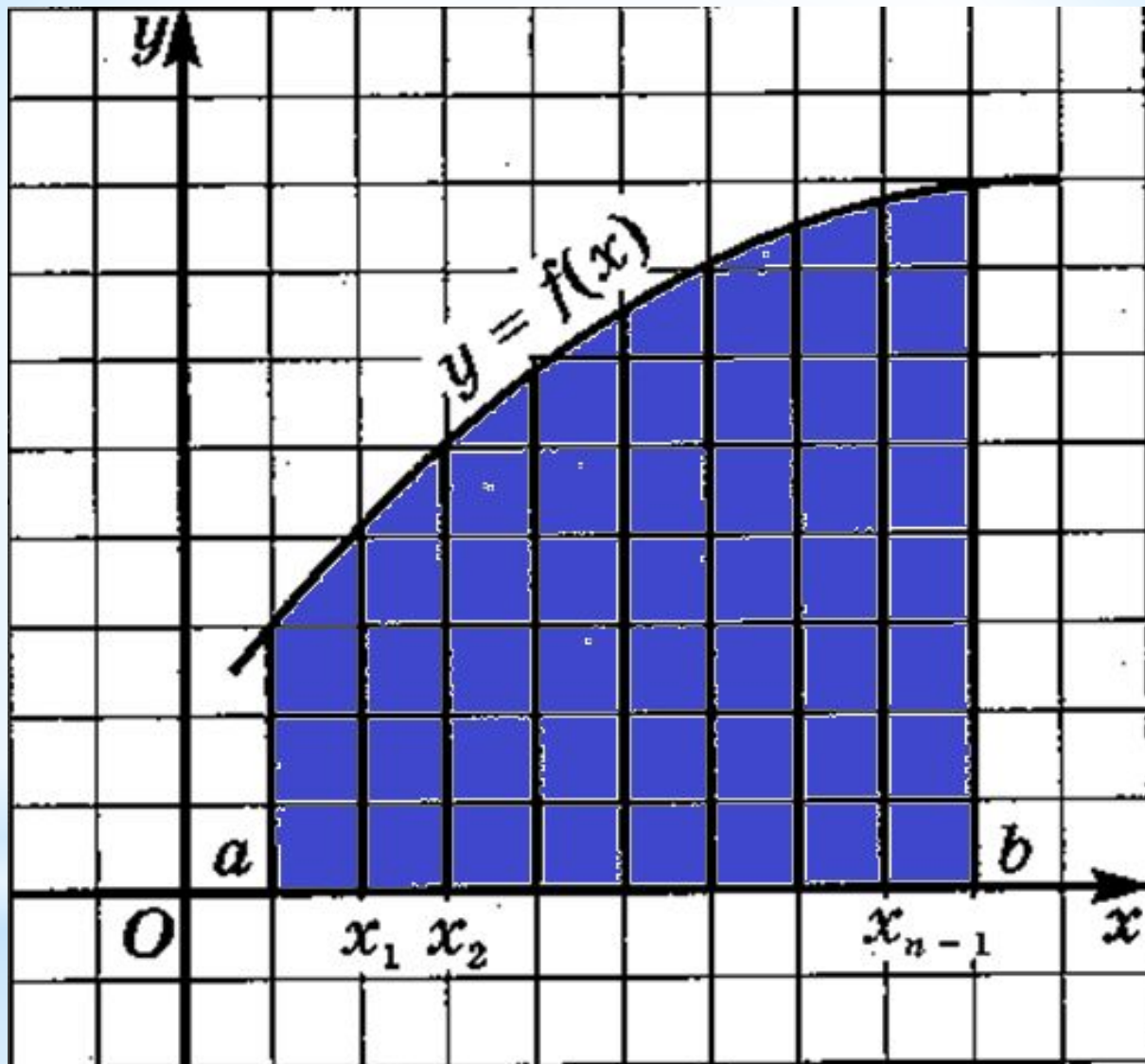
B

8

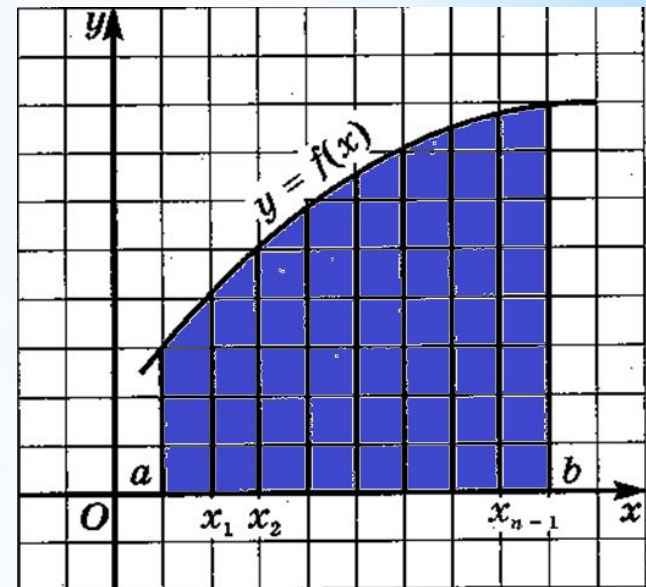
D

КЛЮ

Ч



\* В декартовой прямоугольной системе координат  $XOY$  фигура, ограниченная осью  $OX$ , прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной на отрезке  $[a;b]$  функции  $y=f(x)$ , называется криволинейной трапецией

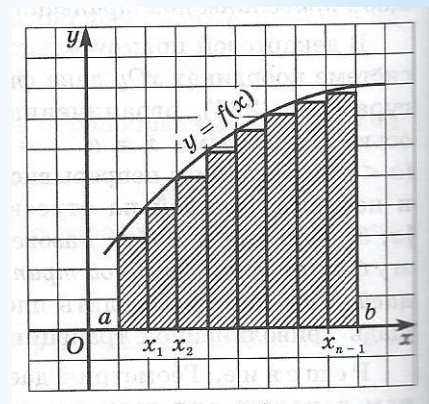


# \* Определенный интеграл

\* Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок  $[a;b]$  на  $n$  равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси  $OY$ . Заданная криволинейная трапеция разобьется на  $n$  частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.

$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$



по определению , его называют

определенным интегралом от функции

$y=f(x)$  по отрезку  $[a;b]$  и обозначают так:

$$\int_a^b f(x) dx$$

\* **Определенный  
интеграл**



# ОПРЕДЕЛЕННЫМ

## ИНТЕГРАЛОМ:

$\int_a^b f(x) dx$  в пределах от  **$a$**  до  **$b$**

от функции  $f(x)$ , непрерывной

на отрезке  $[a, b]$ , называется

приращение любой

ее первообразной  $F(x)$

при изменении аргумента

$x$  от значения  **$x=a$**  до  **$x=b$** :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

# \* Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

\* Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ .



$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

**\* Основные свойства  
определенного  
интеграла**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

**\* Основные свойства  
определенного  
интеграла**

1. Найти первообразную функцию  $F(x)$   
для функции  $f(x)$

2. Вычислить значение  $F(x)$  при  $x=b$   
( $b$  называется верхним пределом)

3. Вычислить значение  $F(x)$  при  $x=a$   
( $a$  называется нижним пределом)

**\* Алгоритм:**

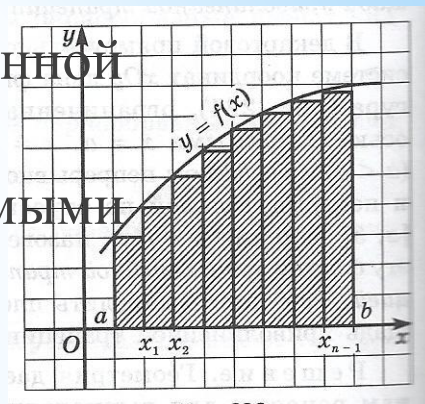
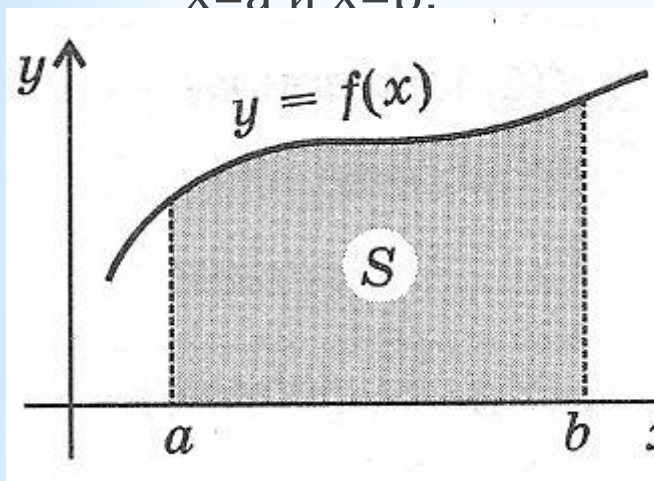
4. Вычислить разность  $F(b) - F(a)$ .

# ПРИМЕНЕНИЕ

# ИНТЕГРАЛА

| Величины   | Вычисление производной  | Вычисление интеграла  |
|--|---|---|
| <p><math>s</math> – перемещение,<br/> <math>v</math> – скорость,<br/> <math>a</math> – ускорение</p> | $\square\square\square\square = \dot{\square\square\square\square}$ $a(t) = \dot{v(t)}$ | $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$ |
| <p><math>A</math> - работа,<br/> <math>F</math> – сила,<br/> <math>N</math> - мощность</p>           | $F(x) = A'(x)$ $N(t) = A'(t)$   | $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$ |
| <p><math>m</math> – масса тонкого стержня,<br/> <math>\rho</math> - линейная плотность</p>           | $\rho(x) = m'(x)$   | $m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$                                 |
| <p><math>q</math> – электрический заряд,<br/> <math>I</math> – сила тока</p>                         | $I(t) = q'(t)$  | $q = \int_{t_1}^{t_2} J(t) dt$                                    |
| <p><math>Q</math> – количество теплоты<br/> <math>c</math> - теплоемкость</p>                        | $c(t) = Q'(t)$  | $Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$                                    |

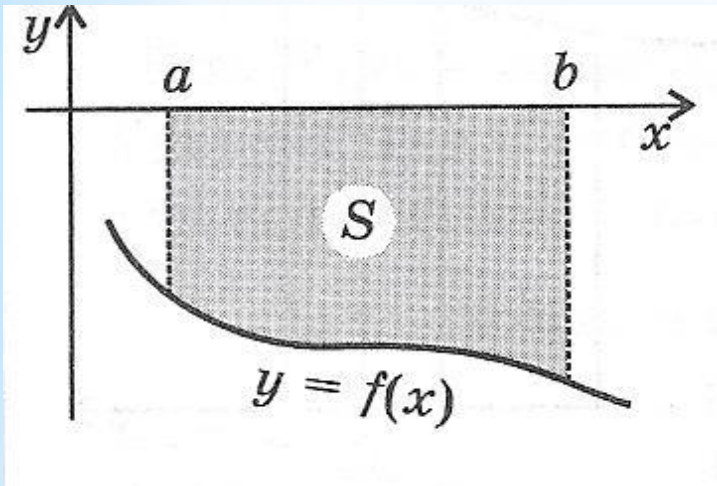
\* Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке  $[a;b]$  функции  $f(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

\* **Геометрический  
смысл  
определенного  
интеграла**

\* Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке  $[a;b]$  функции  $f(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ :



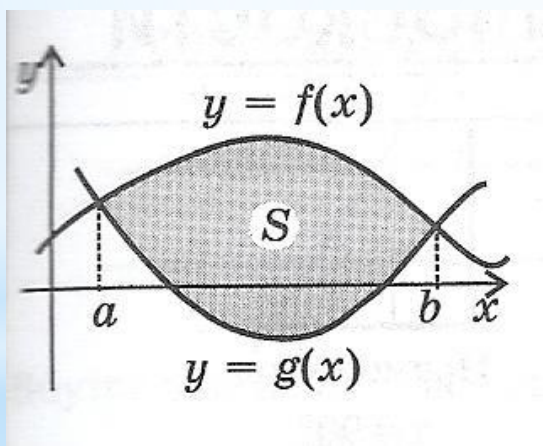
$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

**\* Геометрический  
СМЫСЛ  
определенного  
интеграла**



\* Ограниченной графиками непрерывных функций  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$  таких, что

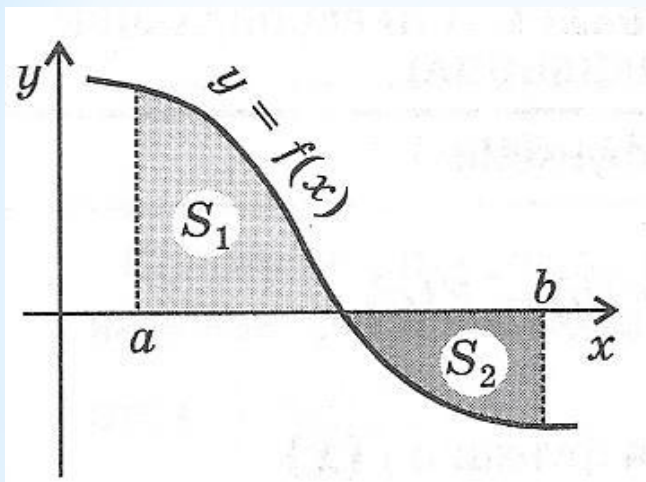
для любого  $x$  из  $[a;b]$ , где  $a$  и  $b$  – абсциссы точек пересечения графиков функций:  $f(x) \geq g(x)$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

**площадь фигуры,**

\***Замечание:** Если функция изменяет знак на промежутке  $[a;b]$  , то



$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx$$

\***Геометрический  
СМЫСЛ  
определенного  
интеграла**

|            | 1    | 2  | 3 | 4  |
|------------|------|----|---|----|
| Вариант 1. |      | 33 |   | 36 |
| Вариант 2. | 48,4 | 16 | 0 |    |

**КЛЮ**

**Ч**

СПАСИБЬ

О

ЗА УРОК