Подготовка к ЕГЭ

Автор работы: Горбунова Ольга Егоровна
учитель математики высшей квалификационной категории МБОУ «Сатинская СОШ»

Задачи на проценты традиционно вызывают сложности у выпускников. Давайте вспомним, что

один процент – это одна сотая часть от чего-либо

$$1\% = \frac{1}{100}, \text{ тогда}$$
$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1;$$
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};$$
$$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5};$$
$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

А что такое дробь (то есть часть) от числа?

Одна четвертая часть от числа x, или $\frac{1}{4}$ от x, означает, что дробь $\frac{1}{4}$ умножается на число (величину) x.

Например, найти 2% от 60 минут - значит, $\frac{2}{100}$ надо умножить на 60.

Чтобы найти дробь от числа, надо дробь умножить на это число.

3. Запишите в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби: 50%, 13%, 45%, 250%.

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$13\% = \frac{13}{100} = 0,13;$$

$$45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = 0,45;$$

$$250\% = \frac{250}{100} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

4. Сколько градусов содержит угол, если он составляет 40% от прямого угла?

Найдем 40% от 90°.

$0,4 \cdot 90 = 36.$

Ответ: 36°.

5. Чему равны в минутах 25% часа? 150% часа?

25% часа – это четверть часа, то есть 15 минут.
150% часа – это 3/2 часа, то есть полтора часа, или 90 минут.

В задачах, да и в жизни, часто говорится об изменении какой-либо величины на определенный процент. Что это значит? Повышение цены на 10% означает, что к прежней цене x прибавили $0,1x$. То есть если первоначальная цена равна x, то новая цена составит $x + 0,1x = 1,1x$. Скидка на 25% означает, что прежняя цена уменьшилась на 25%. И если первоначальная цена была x, то новая цена составит $x - 0,25x = 0,75x$.

6. Кроссовки стоят 3000 рублей. Сезонная скидка составляет 15 процентов. Сколько вы заплатите за кроссовки с учетом скидки?

$0,15 \cdot 3000 = 15 \cdot 30 = 450$ – это сама скидка.

$3000 - 450 = 2550$ (рублей) – это новая стоимость кроссовок с учетом скидки.

7. Клиент взял в банке кредит 120000 рублей на год под 16%. Какую сумму он должен выплатить в течение года с учетом процентов?

$0,16 \cdot 120000 = 19200$ – это проценты,

$120000 + 19200 = 139200$ рублей – выплатит клиент с учетом процентов.

8. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5%. Книга стоит x рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Если стоимость книги принять за 100%, то стоимость ее со скидкой – 95% от x рублей. Значит, с учетом скидки книга будет стоить $0{,}95x$ рублей.

9. За год население города увеличилось на 1,3 процента. Во сколько раз выросло население города?

Пусть население города – x жителей. За год оно увеличилось на $1,3\%$ и стало равно

$$x + 0,013x = 1,013x.$$

Это значит, что население выросло в 1,013 раза.

14. В городе N живет 200000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

В чем сложность задачи и почему ее редко решают правильно? Дело в том, что «15 процентов» или «45 процентов» – понятия относительные. Каждый раз за сто процентов могут приниматься разные величины. Помните правило? В каждом случае за сто процентов принимается то, с чем мы сравниваем.

Найдем сначала, сколько в городе взрослых. По условию, дети и подростки составляют 15% от 200000 жителей. Значит, их число – это 15% от 200000, то есть $\frac{15}{100}$ надо умножить на 200000.

$$\frac{15}{100} \cdot 200000 = 30000$$

Получим, что городе N живет 30000 детей и подростков. Следовательно, взрослых 170000. Среди взрослых 45% не работает. Теперь за 100% мы принимаем число взрослых. Получается, что число работающих взрослых жителей равно 55% от 170000, то есть 93500.

Ответ: 93500.

Запишите в виде математического выражения:

1) x на 5 больше у
2) x в пять раз больше y
3) z на 8 меньше, чем x
4) z меньше x в 3,5 раза
5) t_1 на 1 меньше, чем t_2
6) частное от деления a на b в полтора раза больше b
7) квадрат суммы x и y равен 7
8) x составляет 60 процентов от y
9) m больше n на 15 процентов

Итак, правильные ответы:

1) $x = y + 5$.

x больше, чем y. Разница между ними равна пяти. Значит, чтобы получить бо́льшую величину, надо к меньшей прибавить разницу.

2) $x = 5y$

x больше, чем y, в пять раз. Значит, если y умножить на 5, получим x.

3) $z = x - 8$

z меньше, чем x. Разница между ними равна 8. Чтобы получить меньшую величину, надо из большей вычесть разницу.

4) $z = x : 3,5$

5) $t_1 = t_2 - 1$

t_1 меньше, чем t_2. Значит, если из большей величины вычтем разницу, получим меньшую.

6) $a : b = 1,5b$

7) $(x + y)^2 = 7$

Напомним, что

сумма – это результат сложения двух или нескольких слагаемых;
разность – это результат вычитания;
произведение – результат умножения двух или нескольких множителей;
частное – результат деления чисел.

8) $x = 0,6y$

Мы говорили, что $60\%y = \frac{60}{100} \cdot y = 0,6y$

9) $m = 1,15n$

Если n принять за 100%, а m на 15 процентов больше, то $m = 115\%n = 1,15n$.

за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

Запомним еще несколько полезных формул:

если величину x увеличить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

если величину x уменьшить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right);$$

если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right);$$

если величину x дважды увеличить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$$

если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2.$$

Все эти соотношения выводятся элементарно. В самом деле, если величина x увеличилась на $p\%$ – это значит, что к x прибавили $\frac{p}{100} \cdot x$. Вынесем x за скобки:

$$x + \frac{p}{100}x = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Остальные формулы получаются аналогично.

Воспользуемся ими для решения задач.

1. В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году – на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

По условию, в 2009 году число жителей выросло на 8%, то есть стало равно $40000 \cdot 1,08 = 43200$ человек.

А в 2010 году число жителей выросло на 9%, теперь уже по сравнению с 2009 годом. Получаем, что в 2010 году в квартале стало проживать $40000 \cdot 1,08 \cdot 1,09 = 47088$ жителей.

Ответ: 47088.

2. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

На первый взгляд кажется, что в условии ошибка и цена акций вообще не должна измениться. Ведь они подорожали и подешевели на одно и то же число процентов! Но не будем спешить.

Пусть при открытии торгов в понедельник акции стоили x рублей. К вечеру понедельника они подорожали на $p\%$ и стали стоить $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей. Теперь уже эта величина принимается за 100%, и к вечеру вторника акции подешевели на $p\%$ по сравнению с этой величиной.

Соберем данные в таблицу:

	в понедельник утром	в понедельник вечером	во вторник вечером
стоимость акций	x	$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

По условию, акции в итоге подешевели на 4%.

Получается, что

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = x \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)$$

Поделим обе части уравнения на x (ведь он не равен нулю, значит, делить на него можно) и вспомним, что $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Применим эту формулу в левой части уравнения:

$$1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{4}{100}$$

$$\left(\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{4}{100}$$

По смыслу задачи, $p > 0$.
Получаем, что $p = 20$.

3. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 15842 рублей.

Эта задача тоже решается по одной из формул, приведенных в начале главы. Холодильник стоил 20000 рублей. Его цена два раза уменьшилась на %, и теперь она равна

$$2000\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=15842$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{15842}{20000}$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{7921}{10000}$$

Извлечем корень из обеих частей уравнения:

$$1-\frac{p}{100}=\frac{89}{100}$$

$p=11.$

4. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

Пусть стоимость рубашки равна x, стоимость куртки y. Как всегда, принимаем за с
процентов ту величину, с которой сравниваем. В данном случае это цена куртки. Тог
стоимость четырех рубашек составляет 92% от цены куртки, то есть $4x = 0,92y$.

Стоимость одной рубашки – в 4 раза меньше: х = 0,23у

а стоимость пяти рубашек: $5x = 1,15y = \frac{115}{100}y = 115\%y$.

Получили, что пять рубашек на 15% дороже куртки.

Ответ: 15.

В банк был положен вклад под банковский процент 10%. Через год, после начисления процентов, хозяин вклада снял со счета 2000 рублей, а еще через год снова внес 2000 рублей. Однако, вследствие этих действий через три года со времени первоначального вложения вклада он получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы получил в итоге вкладчик?

Решение.

Пусть вкладчик в банк первоначально положил x рублей. Тогда за 3 года хранения этих денег вклад вырос бы до 1,331 x рублей, то есть до $1,1^3x$ рублей.

За первый год хранения вклада он вырос до 1,1x рублей. Однако, через год вкладчик снял 2000 рублей. На счету осталось $(1,1x-2000)$ рублей. В конце второго года хранения вклада на эту сумму были начислены проценты, вклад стал $(1,1x-2000)\cdot 1,1$ рублей. Однако, вкладчик снова внес 2000 рублей. Сумма вклада стала

$$(1,1x-2000)\cdot 1,1+2000$$ рублей.

К концу третьего года хранения вклада ее сумма стала

$$((1,1x-2000)\cdot 1,1+2000)\cdot 1,1=1,1^3x-2000\cdot 1,1^2+2000\cdot 1,1$$ рублей.

И эту сумму снял вкладчик в итоге вместо первоначально запланированной $1,1^3x$ рублей.

Найдем искомую разность.

$$1,1^3x-1,1^3x+2000\cdot 1,1^2-2000\cdot 1,1=2000\cdot 1,1\cdot(1,1-1)=2000\cdot 1,1\cdot 0,1=220$$

рублей.

Ответ: на 220 рублей.

Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял к вкладу?

Решение.Арифметический подход к решению.

1. 3600 · 1,485 = 5346 тыс. руб. — размер вклада к концу третьего года хранения.
2. 3600 · 1,1 · 1,1 · 1,1 = 4791,6 тыс. руб. — размер вклада к концу третьего года хранения, зависящего от первоначально внесенной суммы.
3. 5346 − 4791,6 = 554,4 тыс. руб. составляют ежегодные дополнительно внесенные вклады, включая начисленные процентные надбавки.
4. Пусть одну часть из суммы 554,4 тыс. руб. составляет дополнительно внесенная сумма в третий год хранения вклада вместе с процентной надбавкой, начисленной на ту же сумму. Тогда 1,1 часть составит размер дополнительно внесенной суммы во второй год хранения вклада с учетом процентной надбавки, начисленной дважды (два года подряд).
5. Всего 1+1,1 = 2,1 (части).
6. 554,4 : 2.1 = 264 тыс. руб. — доля одной части от 554, 4 т. р. вместе с ежегодной процентной надбавкой.
7. 264 : 1,1 = 240 тыс. руб. — сумма, ежегодно добавленная к вкладу.

Алгебраический подход к решению.

Пусть Владимир ежегодно вносил на счет x тыс. руб.
К концу первого года хранения размер вклада стал $3600 \cdot 1{,}1 = 3960$ тыс. руб.
Владимир дополнительно внес x р. Размер вклада стал $3960 + x$ тыс. руб.
К концу второго года хранения размер вклада стал $(3960 + x) \cdot 1{,}1 = 4356 + 1{,}1x$ тыс. руб.
Владимир вновь сделал дополнительный взнос x тыс. руб.
Размер вклада стал $4356 + 1{,}1x + x = 4356 + 2{,}1x$ тыс. руб.
К концу года были начислены проценты на сумму $4356 + 2{,}1x$ тыс. руб.
Размер вклада стал $(4356 + 2{,}1x) \cdot 1{,}1 = 4791{,}6 + 2{,}31x$ тыс. руб., который равен $3600 \cdot 1{,}485 = 5346$ тыс. руб.
Таким образом, составим и решим уравнение: $4791{,}6 + 2{,}31x = 5346 \Leftrightarrow 2{,}31x = 554{,}4 \Leftrightarrow x = 240$.

Ответ: 240 000 рублей.

МАТЕМАТИКА

Алгебра

У меня всё получилось!!!

Надо решить ещё пару примеров.

Ну кто придумал эту математику !

Литература

А.г. Гущин «Решу ЕГЭ»

Анна Малкова
ЕГЭ-2015 по математике. Полный курс подготовки.