ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Показательные уравнения

[Определение]

[Простейшие уравнения]

[Способы решения сложных уравнений]

*Определение

Уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени, называется **показательным**.

Примеры: $2^x = 8; \quad 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени.

$$\boxed{a^x = a^b \Leftrightarrow x = b}$$

Способы решения сложных показательных уравнений.

Замена переменной

Деление на показательную функцию

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Данный способ используется, если соблюдаются два условия:

1) основания степеней одинаковы;
2) коэффициенты перед переменной одинаковы

Например: $$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

$$2^{x-2}(\ 2^3 - 4 \cdot 1) = 32$$

$$2^{x-2}(8-4) = 32$$

$$2^{x-2} \cdot 4 = 32 | : 4$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Ответ: 5

x + 1 - (x - 2) =

= x + 1 – x + 2 = 3

Замена переменной

При данном способе показательное уравнение сводится к квадратному.

Способ замены переменной используют, если

а) основания степеней одинаковы;

б) показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой.

Например:

$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} - 45 = 0$

коэффициенты перед переменной противоположны.

Например:

$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$

Замена переменной (1)

основания степеней одинаковы, показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой .

$3^{2x} – 4 \cdot 3^{x} – 45 = 0$

$t = 3^x$ ($t > 0$)

$t^2 – 4t – 45 = 0$

По т. Виета: $t_1 \cdot t_2 = -45$; $t_1 + t_2 = 4$

$t_1 = 9$; $t_2 = -5$ – не удовлетворяет условию

$3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$.

Ответ: 2

Замена переменной (2)

Основания степеней одинаковы,
коэффициенты перед переменной противоположны.

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1$$

$$t = 2^x \ (\mathrm{t} > 0)$$

2 t 2t

$$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} = 1$$

$$8 - t^2 = 2t$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

По т. Виета:

$$t_1 \cdot t_2 = -8, \ t_1 + t_2 = -2$$

$t_1 = -4$ - Не удовлетворяет условию

$$t_2 = 2$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

Деление на показательную функцию

Данный способ используется, если основания степеней разные.

а) в уравнении вида $a^x = b^x$ делим на b^x

Например: $2^x = 5^x \mid : 5^x$

б) в уравнении $A\,a^{2x} + B\,(ab)^x + C\,b^{2x} = 0$ делим на b^{2x}.

Например:

$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$

Деление на показательную функцию

$$a)\ 2^x = 5^x \,|:5^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0

Деление
на показательную функцию

$$3\cdot 25^x - 8\cdot 15^x + 5\cdot 9^x = 0 \Big| \; :9^x$$

$$\frac{3\cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8\cdot 5^x\cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x} + 5 = 0$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^{x} \quad (t > 0)$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4\cdot 3\cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \qquad t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \frac{5}{3}$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{0}$$

$$x = 0$$

Ответ: 0; 1.