Тангенс суммы и разности аргументов

Цели

- *Изучить формулы тангенса суммы и разности аргументов.*
- *Рассмотреть практическое применение данных формул.*

Повторим

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

Синус суммы двух аргументов равен произведению синуса первого аргумента на косинус второго плюс произведение косинуса первого аргумента на синус второго.

Повторим

$$\cos(x+y)= \cos x\cos y-\sin x\sin y$$

Косинус суммы двух аргументов равен произведению косинусов этих аргументов минус произведение синусов этих аргументов.

Повторим

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

Синус разности двух аргументов равен произведению синуса первого аргумента на косинус второго минус произведение косинуса первого аргумента на синус второго.

Повторим

$$\cos(x-y)= \cos x\cos y+\sin x\sin y$$

Косинус разности двух аргументов равен произведению косинусов этих аргументов плюс произведение синусов этих аргументов.

Выведем формулу тангенса суммы двух аргументов

$$tg(x+y)=$$

По определению тангенс есть отношение синуса к косинусу одного и того же аргумента

$$tg(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=$$

По изученным формулам синуса и косинуса суммы, получим

$$tg(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=$$

$$=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y},$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби на $\cos x\cos y$

$$\cos x\cos y\neq 0$$

При всех допустимых значениях х и у

$$\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} =$$

$$= \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\, tgy}.$$

Получили:

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}$$

Аналогично можно доказать, что

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\,tgy}$$

Пример 1. **Вычислить:** $tg75^0$

Решение.

$$tg75^0 = tg\left(45^0 + 30^0\right) = \frac{tg45^0 + tg30^0}{1 - tg45^0 tg30^0} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

Пример 2. **Вычислить:** $tg15^0$

Решение.

$$tg15^0 = tg\left(45^0 - 30^0\right) = \frac{tg45^0 - tg30^0}{1 + tg45^0 tg30^0} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

Пример 3. **Вычислить:** $$\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}$$

Решение.

$$\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}= tg\left(27^0+18^0\right)=$$

$$=tg45^0=1$$

Историческая страничка

Замена хорд синусами стала главным достижением средневековой Индии. Такая замена позволила вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника. В Индии было положено начало тригонометрии как учению о тригонометрических величинах. Индийские учёные пользовались различными тригонометрическими соотношениями, в том числе и теми, которые в современной форме выражаются как

Средневековая Индия

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

Тригонометрия необходима для астрономических расчётов, которые оформляются в виде таблиц. Первая таблица синусов имеется в «Сурья-сиддханте Тригонометрия необходима для астрономических расчётов, которые оформляются в виде таблиц. Первая таблица синусов имеется в «Сурья-сиддханте» и у Ариабхаты Тригонометрия необходима для астрономических расчётов,

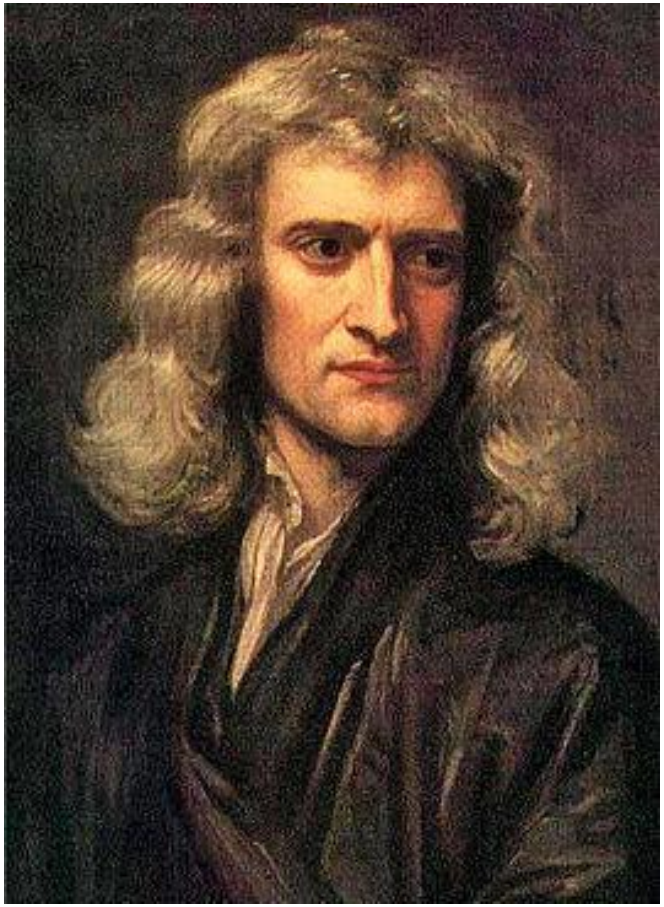
Статуя Ариабхаты. Индийский межуниверситетский центр астрономии и астрофизики (IUCAA)

Южноиндийские математики в XVI веке добились больших успехов в области суммирования бесконечных числовых рядов. В анонимном трактате «Каранападдхати» («Техника вычислений») даны правила разложения синуса и косинуса в бесконечные степенные ряды. Нужно сказать, что в Европе к подобным результатам подошли лишь в 17-18 вв.

Исаак Ньютон

Так, ряды для синуса и косинуса вывел Исаак НьютонТак, ряды для синуса и косинуса вывел Исаак Ньютон около 1666 г., а ряд арктангенса был найден Дж. ГрегориТак, ряды для синуса и косинуса вывел Исаак Ньютон около 1666 г., а ряд арктангенса был найден Дж. Грегори в 1671 г.

и Г. В. Лейбницем в



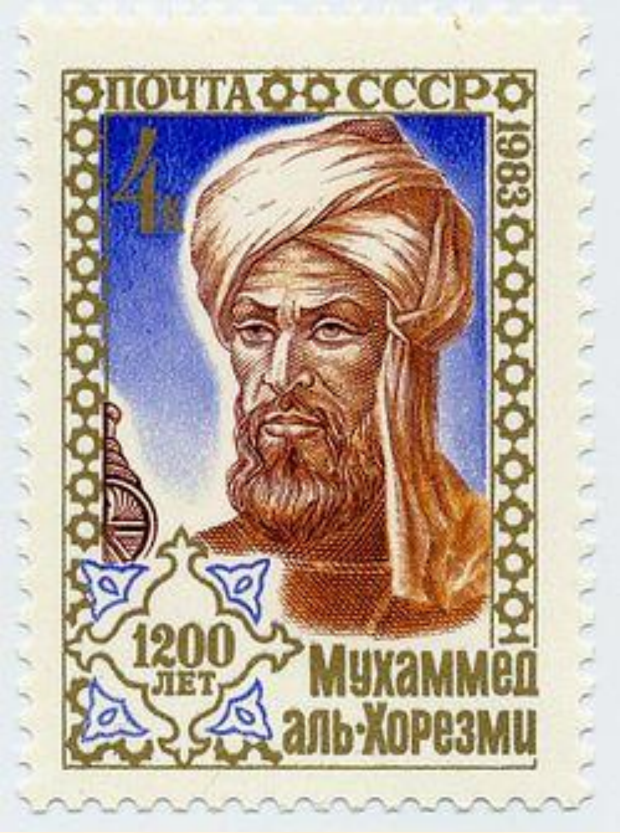
Джеймс Грегори

Дата рождения: 1638
Место рождения: Драмоук, Шотландия

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Дата рождения:
21 июня (1 июля) 1646
Место рождения: Лейпциг, Саксония, Германия, Священная Римская империя

Аль-Хорезми



С VIII века учёные стран Ближнего и Среднего Востока развили тригонометрию своих предшественников. В середине IX века среднеазиатский учёный аль-ХорезмиС VIII века учёные стран Ближнего и Среднего Востока развили тригонометрию своих предшественников. В середине IX века среднеазиатский

Имя при рождении: Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми аль-Маджуси

Дата рождения:
не позднее 799 или 780