

Тангенс суммы и разности аргументов

Цели

- *Изучить формулы тангенса суммы и разности аргументов.*
- *Рассмотреть практическое применение данных формул.*



Повторим

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Синус суммы двух аргументов равен произведению синуса первого аргумента на косинус второго плюс произведение косинуса первого аргумента на синус второго.



Повторим

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Косинус суммы двух аргументов равен произведению косинусов этих аргументов минус произведение синусов этих аргументов.



Повторим

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Синус разности двух аргументов равен произведению синуса первого аргумента на косинус второго минус произведение косинуса первого аргумента на синус второго.



Повторим

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Косинус разности двух аргументов равен произведению косинусов этих аргументов плюс произведение синусов этих аргументов.



**Выведем формулу тангенса суммы
двух аргументов**

$$tg(x + y) =$$

**По определению тангенс есть отношение синуса
к косинусу одного и того же аргумента**

$$tg(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} =$$

**По изученным формулам синуса и
косинуса суммы, получим**



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \\ &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}, \end{aligned}$$

**Разделим числитель и знаменатель
последней дроби на $\cos x \cos y$**

$$\cos x \cos y \neq 0$$

При всех допустимых значениях x и y



$$\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$



Получили:

$$tg(x + y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx tgy}$$

Аналогично можно доказать, что

$$tg(x - y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx tgy}$$



Пример 1.

Вычислить: $tg75^0$

Решение.

$$\begin{aligned}tg75^0 &= tg(45^0 + 30^0) = \frac{tg45^0 + tg30^0}{1 - tg45^0 tg30^0} = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$



Пример 2.

Вычислить: $tg15^0$

Решение.

$$\begin{aligned}tg15^0 &= tg(45^0 - 30^0) = \frac{tg45^0 - tg30^0}{1 + tg45^0 tg30^0} = \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\end{aligned}$$



Пример 3.

Вычислить:
$$\frac{\operatorname{tg} 27^{\circ} + \operatorname{tg} 18^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 27^{\circ} \operatorname{tg} 18^{\circ}}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} 27^{\circ} + \operatorname{tg} 18^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 27^{\circ} \operatorname{tg} 18^{\circ}} &= \operatorname{tg}(27^{\circ} + 18^{\circ}) = \\ &= \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1 \end{aligned}$$

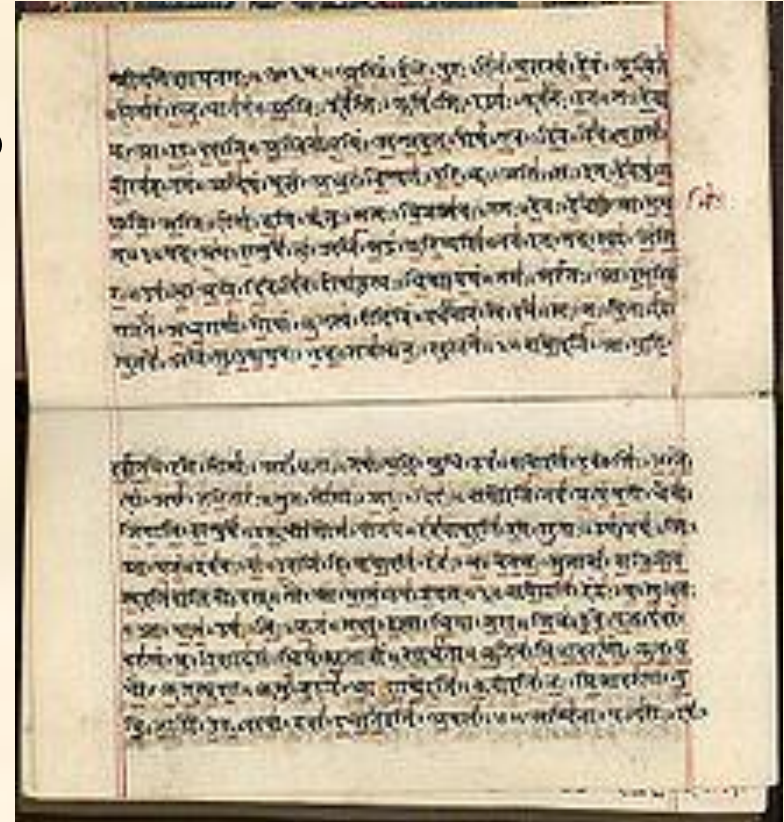


Историческая страничка

Замена хорд синусами стала главным достижением средневековой Индии. Такая замена позволила вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника. В Индии было положено начало тригонометрии как учению о тригонометрических величинах. Индийские учёные пользовались различными тригонометрическими соотношениями, в том числе и теми, которые в современной форме выражаются как

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$



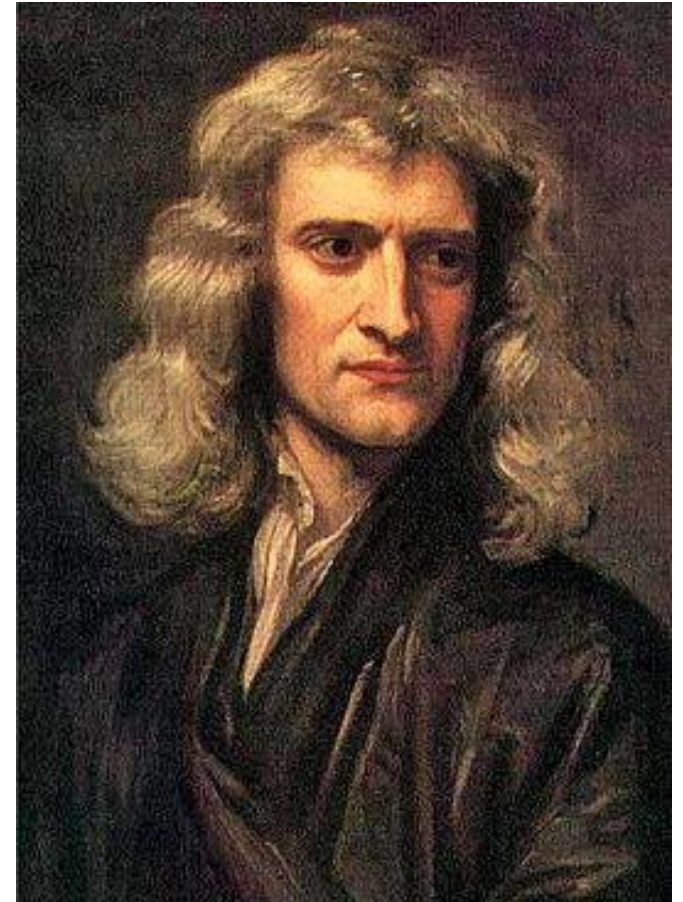
Тригонометрия необходима для астрономических расчётов, которые оформляются в виде таблиц. Первая таблица синусов имеется в «[Сурья-сиддханте](#)» Тригонометрия необходима для астрономических расчётов, которые оформляются в виде таблиц. Первая таблица синусов имеется в «Сурья-сиддханте» и у [Ариабхаты](#) Тригонометрия необходима для астрономических расчётов.



Статуя Ариабхаты.
Индийский
межуниверситетский
центр астрономии и
астрофизики (IUSAA)

Южноиндийские математики в XVI веке добились больших успехов в области суммирования бесконечных числовых рядов. В анонимном трактате «Каранападдхати» («Техника вычислений») даны правила разложения синуса и косинуса в бесконечные степенные ряды. Нужно сказать, что в Европе к подобным результатам подошли лишь в 17-18 вв.

Исаак Ньютон



Так, ряды для синуса и косинуса вывел Исаак Ньютон Так, ряды для синуса и косинуса вывел Исаак

Ньютон около 1666 г., а ряд арктангенса был найден Дж. Грегори Так, ряды для синуса и косинуса вывел Исаак Ньютон около 1666 г., а ряд арктангенса был найден Дж. Грегори в 1671 г.

и Г. В. Лейбницем в

Джеймс Грегори



Дата рождения: 1638

Место рождения:

Драмоук, Шотландия

Готфрид Вильгельм Лейбниц



Дата рождения:

21 июня (1 июля) 1646

Место рождения: Лейпциг,

**Саксония, Германия, Священная
Римская империя**

Аль-Хорезми

С VIII века учёные стран Ближнего и Среднего Востока развили тригонометрию своих предшественников. В середине IX века среднеазиатский учёный аль-Хорезми С VIII века учёные стран Ближнего и Среднего Востока развили тригонометрию своих предшественников. В середине IX века среднеазиатский



Имя при рождении: Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми аль-Маджуси
Дата рождения: не позднее 799 или 780