

Рациональные уравнения

Алгебра, 11 класс.

Подготовка к решению С1.

Равносильные преобразования

- Перенос члена уравнения из одной части в другую с противоположным знаком.
- Возведение обеих частей уравнения в нечётную степень.
- Умножение обеих частей уравнения на выражение, отличное от 0 и не нарушающего ОДЗ.
- Возведение в чётную степень обеих частей уравнения, если обе части неотрицательны.
- Решения, выполненные с равносильными преобразованиями, не требуют проверки.

Укажите равносильные уравнения в левом и правом столбцах

$$1) x^2 - 3x + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - 2$$

$$2) x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$3) \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$$

$$4) \frac{(x-1)^2(x+1)}{x-1} = 0$$

$$5) (x-3)(x+1) = (5x-4)(x+1)$$

$$6) x^2 = 9$$

$$1) x^2 - 3x = -2$$

$$2) x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$3) x^2 - 1 = 0$$

$$4) (x-1)(x+1) = 0$$

$$5) x - 3 = 5x - 4$$

$$6) |x| = 3$$

Решите уравнение

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10.$$

Решение.

$$\text{Подстановка: } \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) = t, \quad t^2 = \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{9}{(x-2)^2} - 3$$

$$2(t^2 + 3) = 7t + 10, \quad 2t^2 - 7t - 4 = 0, \quad t = -0,5, \quad t = 4.$$

$$\text{Если } t = -0,5: \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) = -0,5 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (x-2)^2 - 6 = -x + 2 \\ x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x = -1, \quad x = 4. \end{cases}$$

$$\text{Если } t = 4: \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) = 4 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (x-2)^2 - 6 = 8x - 16 \\ x^2 - 12x + 14 = 0, \quad x = 6 - \sqrt{22}, \quad x = 6 + \sqrt{22}. \end{cases}$$

Ответ: - 1; 4; $6 - \sqrt{22}$; $6 + \sqrt{22}$.

Отбор корней

Указать корни, принадлежащие промежутку $[-2; 2]$.

1) $-1 \in [-2; 2]$

2) $4 \notin [-2; 2]$

3) $4 \leq \sqrt{22} \leq 5$, $0 \leq 6 - \sqrt{22} \leq 2$, $(6 - \sqrt{22}) \in [-2; 2]$

4) $\sqrt{22} > 0$, $6 + \sqrt{22} > 2$, $6 + \sqrt{22} \notin [-2; 2]$

Ответ: $-1; 6 - \sqrt{22}$.

Решите самостоятельно

$$\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1$$

и укажите корни, принадлежащие промежутку $[-2; 3]$.