Применение производной к исследованию функций в задачах ЕГЭ

Стус Валентина Дмитриевна
учитель математики
МБОУ «Новоселовская школа»

23.04.2018

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если производная положительна (но при этом может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция возрастает на этом отрезке.

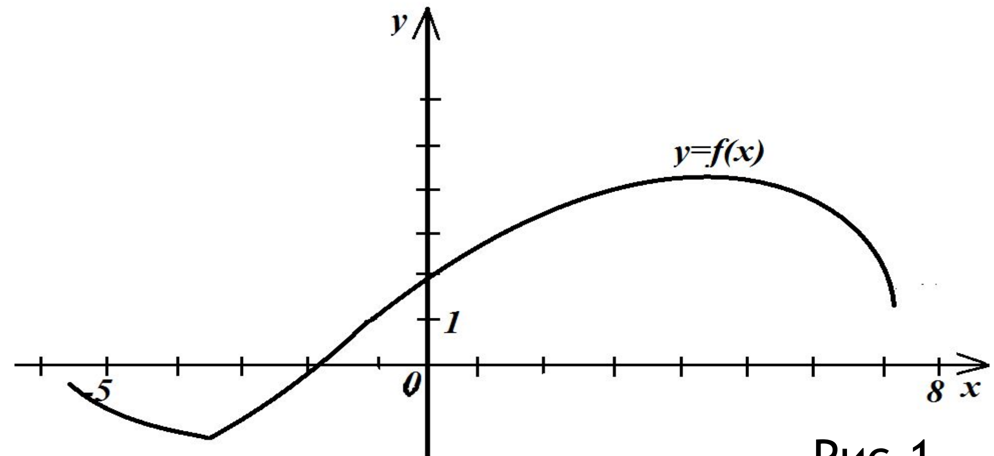

Рис.1

Если производная отрицательна (при этом она может равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция убывает на этом отрезке.

Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$ (см. рис.2), причем в точке $x = x_0$ производнаяравна нулю или не существует, то тогда это точка экстремума (точка минимума или точка максимума).

Рис.2

На рисунках 3; 4 изображены два графика производных разных функций. На обоих графиках **x = a** -- точка максимума функции $f(x)$; **x = b** -- точка минимума функции $f(x)$.

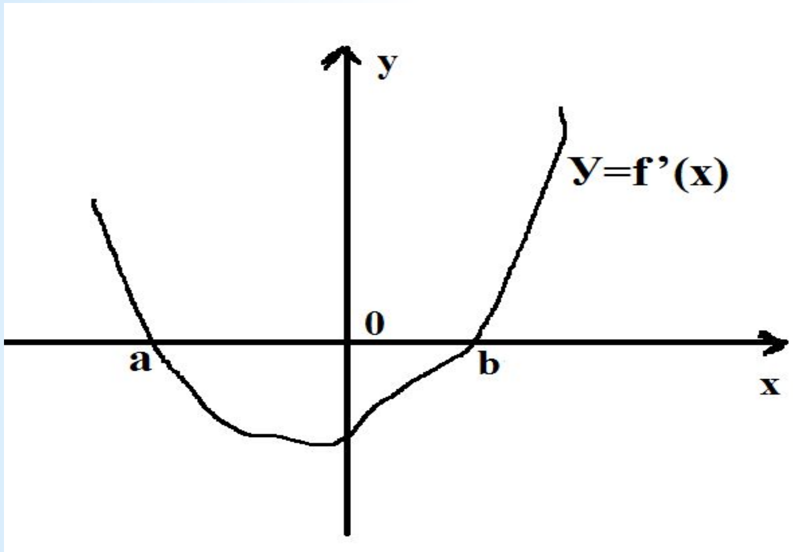

Рис.3

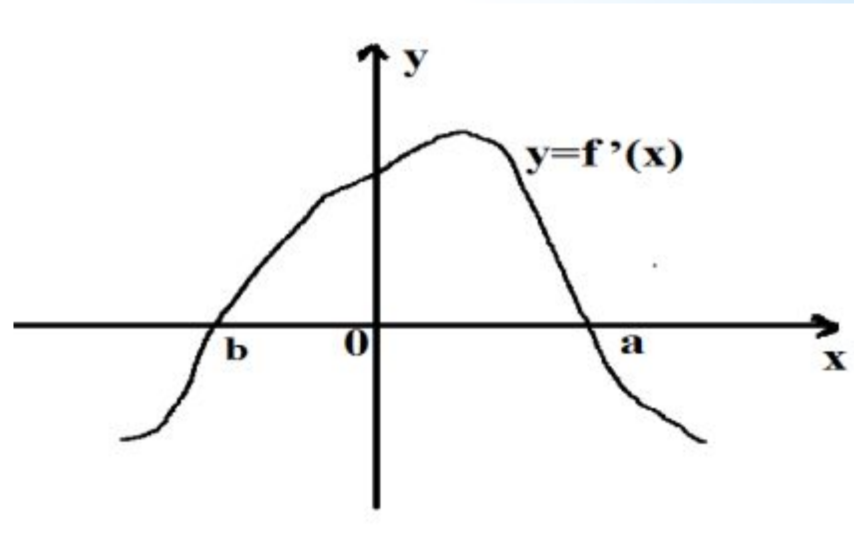

Рис.4

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает наибольшее и наименьшее значение либо на концах отрезка, либо в тех точках, где производная равна нулю (или не существует). Поэтому **один из способов** отыскать наибольшее и наименьше значения функции на отрезке – посчитать ее значения на концах отрезка и в точках, где производная равна нулю (или не существует), и выбрать из них наибольшее или наименьшее значение.

Второй способ отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке – <u>исследовать функцию на монотонность </u>(другими словами, на возрастание - убывание), построить эскиз и посчитать значения функции в нужных точках.

Точки максимума могут как совпадать, так и не совпадать с точками, где функция принимает наибольшее значение. То же можно сказать про точки, где функция принимает наименьшее значение.

Задачи с решениями

Задача №1. Найдите наименьшее значение функции *у=(х+7)*e^{x+8} на отрезке [-9; -7]

***Решение*.**

1-й способ.

Найдем значения функции на концах отрезка:

$y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27}$, так как е= 2,7;

$y(-7) = (-7+7)e^{-7+8} = 0.$

Найдем производную:

Y' = ((x+7) e^{x+8})'= (x+7)' e^{x+8} + (x+7)(e^{x+8})'= 1e^{x+8} + (x+7) e^{x+8} = (1+x+7) e^{x+8} =

= (x+8) e^{x+8}.

Найдем значение *x*, при которых производная функции равна нулю:

$(x+8)e^{x+8} = 0$; x+8=0; x=-8.

Это значение *х=-8* принадлежит промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке[-9; -7].

Найдем значение функции в точке, где производная равна нулю:

У(-8)= (-8+7)e^{-8+8}= -1*1= -1.

Выберем наименьшее значение функции из чисел $-\frac{20}{27}$; -1; 0; наименьшим является -1.

Ответ: -1.

2-й способ.

Найдем производную y'= $((x+7)e^{x+8})' = (x+8)e^{x+8}$.

Найдем значение *x*, при которых производная функции равна нулю:

$(x+8)e^{x+8}=0$; x+8=0; x=-8.

Проверим, принадлежат ли эти значения *x* промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке [-9;-7] .

Нарисуем числовую ось и нанесем на неё нули (x= -8) и знаки производной, которые определяются с помощью пробной точки (см. рис. 5).

$y'(-9) = (-9+8)\, e^{-9+8} = -1e^{-1} < 0$;

$y'(-7) = (-7+8)\, e^{-7+8}\ \ 1e > 0$.

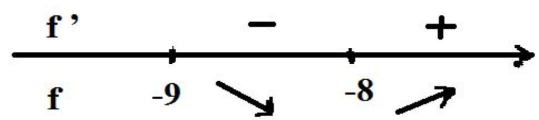

Рис. 5

Чертим эскиз графика функции (см. рис. 6).

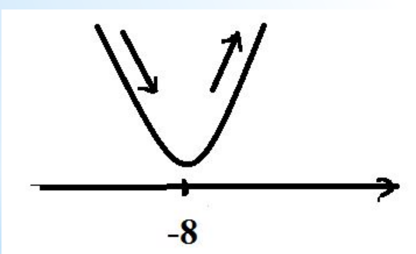

Рис.6

По рисунку видно, что наименьшее значение функция принимает в точке = -8.

Вычисляем значение функции в точке x = -8:

$y(-8) = (-8+7)\, e^{-8+8} = -1*1 = -1$.

Ответ :-1.

Задача №2. Найдите наименьшее значение функции y = $3\sqrt{2}$ sinx +
+$3\sqrt{2}$x – 15 на отрезке [0; $\frac{\pi}{2}$].

Решение.

Найдем производную:
$y'(x) = (3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2} - 15)' = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} + 0 = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$.
Определим знаки производной y'(x) $= 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$. Это выражение не отрицательно при всех значениях x, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до +1 (всегда выполняется $3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} \geq = 3\sqrt{2}(-1) + 3\sqrt{2} = 0$). Следовательно, $y'(x)$≥0, и функция возрастает при всех значениях x. Наименьшее значение возрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка (при наименьшем возможном значении аргумента x=0).

Вычислим значение функции в точке x=0.
y = $3\sqrt{2}$ sinx + $3\sqrt{2}$x – 15 $3\sqrt{2}$ sin0 + $3\sqrt{2}$ $*$0 – 15 =15.

Ответ: -15.

Задача №3.Найдем наибольшее значение функции
$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Решение:

Найдем значение функции на концах отрезка:
$y(0) = 4\sqrt{2}\cos 0 + 4x - \pi - 1 = 4\sqrt{2} - \pi - 1 \approx 6 - 3{,}1 - 1 = 1{,}9$;
$y(\frac{\pi}{2}) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2} + 4\frac{\pi}{2} - \pi - 1 = 0 + \pi - 1 \approx 2{,}1$.
Найдем производную:
$y' = (4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1)' = -4\sqrt{2}\sin x + 4$.
Найдем значения на заданном промежутке, при которых производная равна нулю : $-4\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$, $\sqrt{2}\sin x = 1$; $\sin x = 1/\sqrt{2}$.
Так как x принадлежит отрезку $[0; \frac{\pi}{2}]$, нам подходит $x = \frac{\pi}{4}$.
Найдем значения функции при $x = \frac{\pi}{4}$.
$y(\frac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + 4\frac{\pi}{4} - \pi - 1 = 3$
Выберем наибольшее значение . Наибольшим является 3.

Ответ: 3.

Задача №4. Найдите наибольшее значение функции $y = 16x - 16\tan x + 4\pi - 56$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

Решение:

Найдем производную:

y' =(16x-16$\tan x$ +4π -56) ' = 16 – 16 $\cos^{-2} x$ – 0 =
=(16$\cos^2 x$ -16)/ $\cos^2 x$.

Определим знаки производной: 16($\cos^2 x$ -1)/ $\cos^2 x$ ≤ 0.

Это выражение неположительное, так как $\cos x$принимает значения от -1 до +1. Следовательно,$y'(x) \leq 0$, и функция убывает при всех допустимых значениях. Наибольшее значение функция принимает на левом конце заданного промежутка, то есть при наименьшем возможном значении аргумента x= - $\frac{\pi}{4}$.

Вычислим значение функции в точке x= - $\frac{\pi}{4}$.

Y($-\frac{\pi}{4}$) =16(- $\frac{\pi}{4}$) $-$16$\tan(-\frac{\pi}{4})$ +4π -56= -4 π+16 +4 π-56= -40.

Ответ: -40.

Первообразная

Задача №5. На рис. 7 изображён график функции y=F(x), где F(x) – первообразная функции y=f(x).

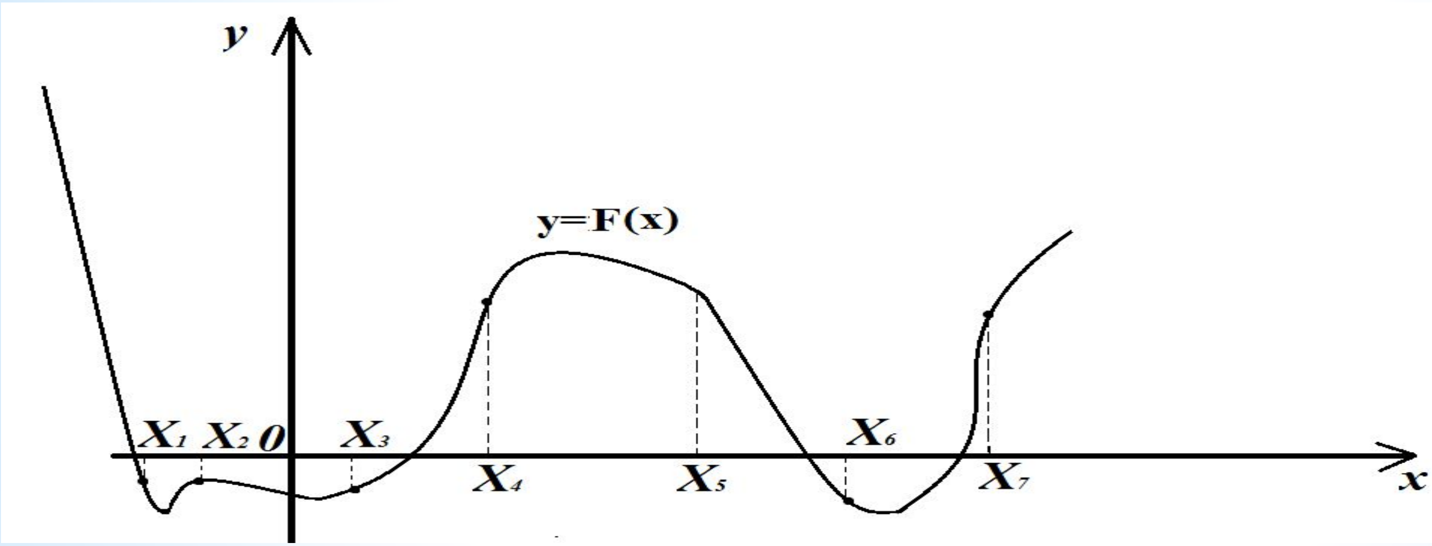

Рис. 7

Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 те, в которых f(x) положительна. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение:

Функция f(x) является производной функции F(x), поэтому f(x)>0 на всех интервалах, где F(x) возрастает. Находим по рисунку , какие точки принадлежат промежуткам возрастания F(x) (исключая лишь концы промежутков, где F' (x)= f(x)=0). Это точки x_3, x_4, x_7. Их количество равно 3.

Ответ: 3.

3.Площадь криволинейной трапеции и определенный интеграл

Площадь **S** криволинейной трапеции можно вычислить с помощью первообразной функции по формуле $\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{в}} f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = F(\mathrm{в}) - F(\mathrm{a})$

Задача №6. На рисунке 8 изображен график некоторой функции y=f(x). Одна из первообразных этой функции равна $F(x)= (2x^3)/3 +2x^2 +3x-1$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

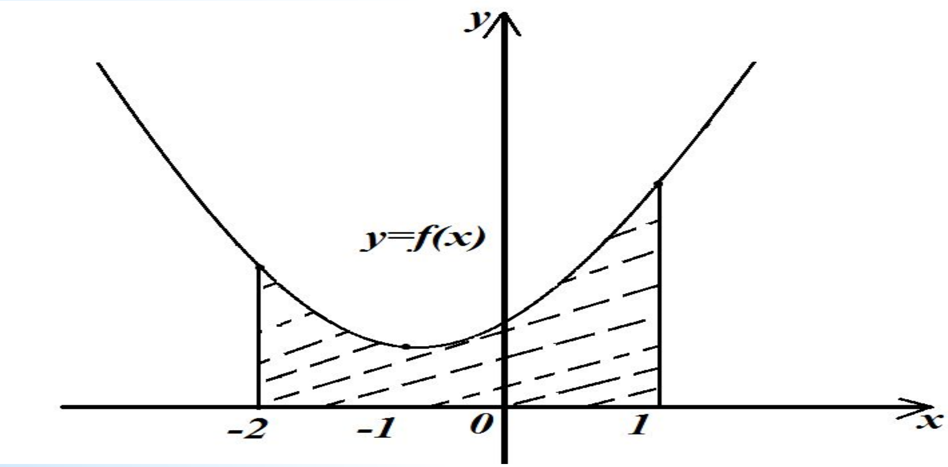

Рис. 8

Решение:

Криволинейная трапеция на рис 8 ограничена отрезками прямых x=-2, x=1 и графиком функции y= f(x). Для вычисления площади фигуры используем формулу **S** =F(в) - F(а) . В нашем случае а=-2, в = 1.

S = $F(1) - F(-2)=((2*1^3)/3 +2*1^2 +3*1-1) - ((2(-2)^3)/3 +2(-2)^2 +3(-2) --1) = 9$.

Ответ: 9.

Задача №7. На рис. 9 изображен график функции $y= f(x)= 5 - |x+1| - |x-2|$. Пользуясь графиком , вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

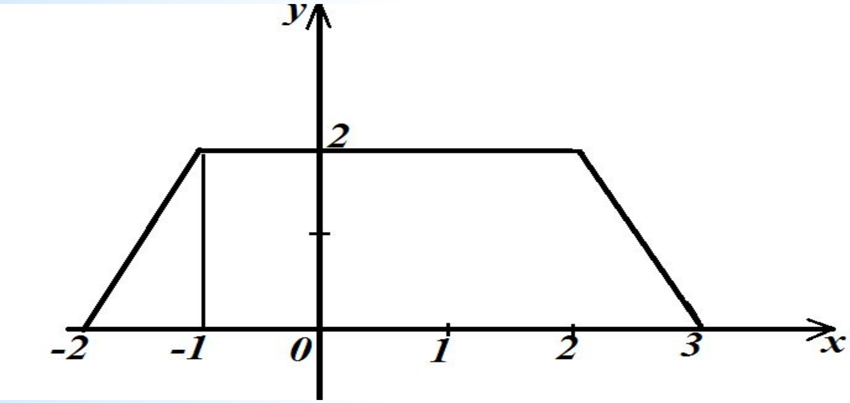

Рис. 9

Решение:
Найдем определенный интеграл, посчитав площадь трапеции АСВД (смотри рис 10)

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = S_{АСВД} = \frac{ВС+АД}{2} = \frac{3+4}{2} \cdot 2 = 7$$

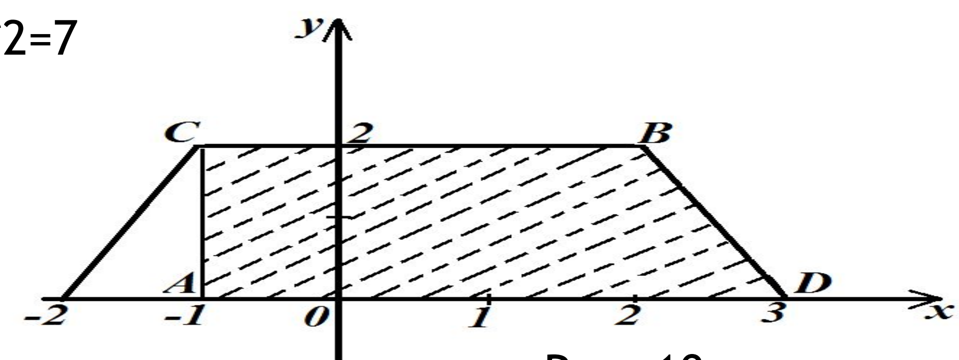

Рис. 10

Ответ: 7

Задача №8. На рис. 11 изображен график функции y=f(x)., определенной на интервале(-5; 8). Найдите количество точек в которых касательная к графику функции F(x),которая является первообразной для функции f(x), параллельна прямой y=3x+8 или совпадает с ней.

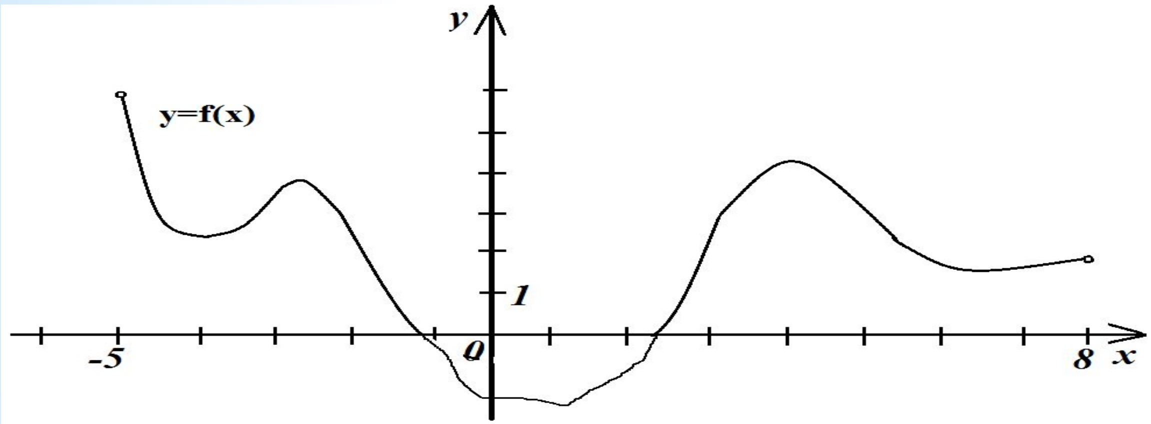

Рис. 11

Решение:

Функция y=f(x) является производной для F(x) , то есть f(x)= F' (x). Значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания: f(x)= F'(x)=3. Проведем прямую y=3, параллельную оси OX (рис 12). Она пересекает график в пяти точках. В этих точках касательная к графику функции y= F(x) параллельна прямой y=3x+8 или совпадает с ней.

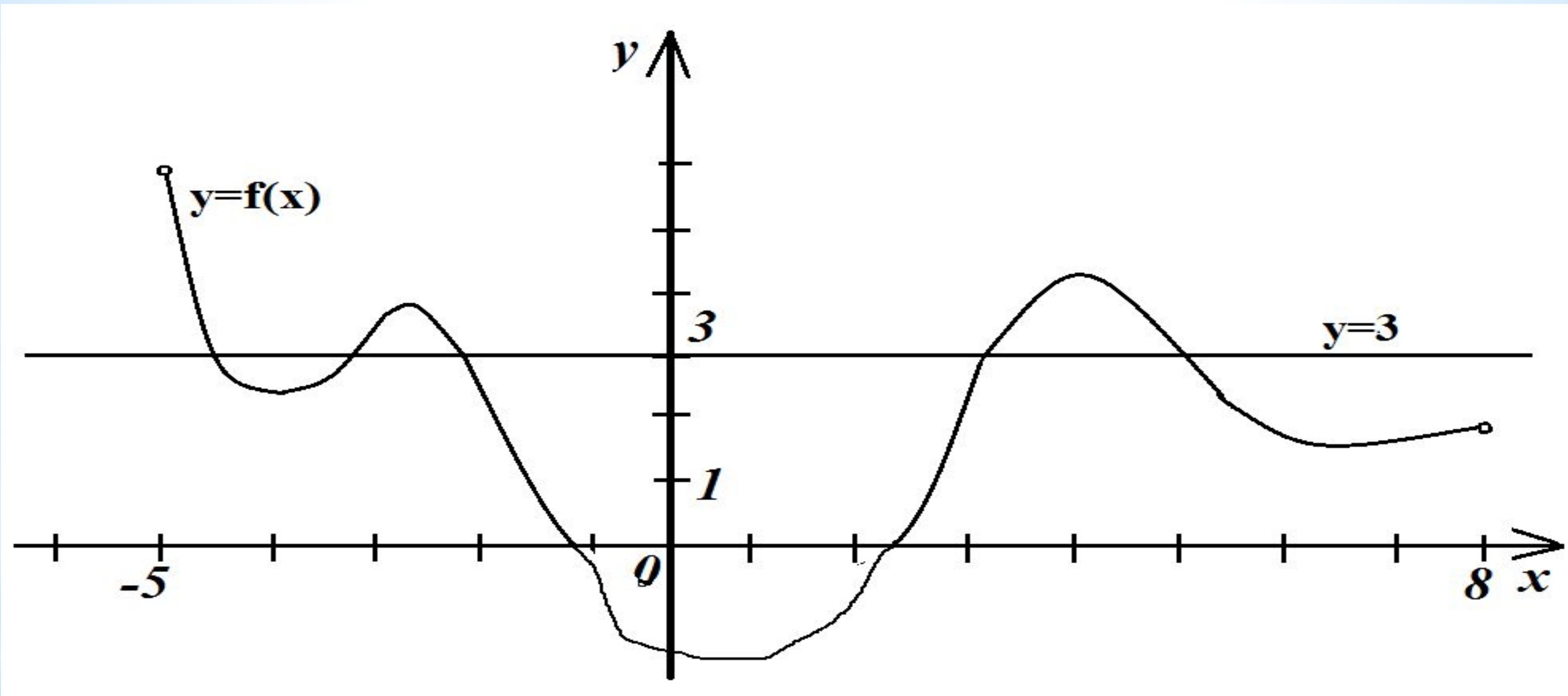

Рис. 12

Ответ: 5.