

Применение производной к исследованию функций в задачах ЕГЭ

Стус Валентина Дмитриевна
учитель математики
МБОУ «Новоселовская школа»

23.04.2018

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если производная положительна (но при этом может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция возрастает на этом отрезке.

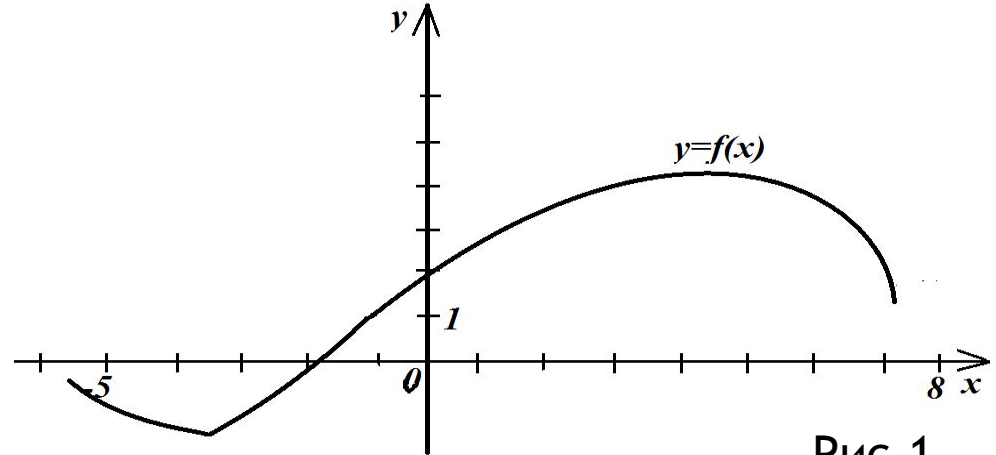


Рис.1

Если производная отрицательна (при этом она может равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция убывает на этом отрезке.

Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$ (см. рис.2), причем в точке $x=x_0$ производная равна нулю или не существует, то тогда это точка экстремума (точка минимума или точка максимума).

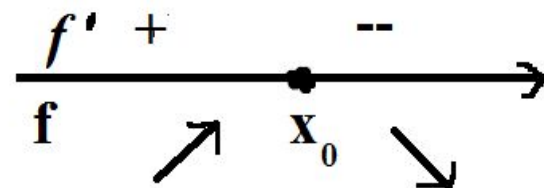
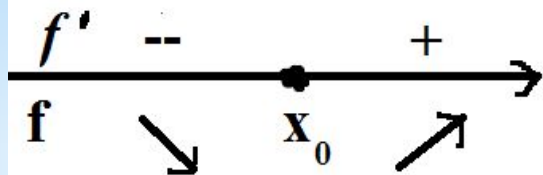


Рис.2

На рисунках 3; 4 изображены два графика производных разных функций. На обоих графиках $x = a$ -- точка максимума функции $f(x)$; $x = b$ -- точка минимума функции $f(x)$.

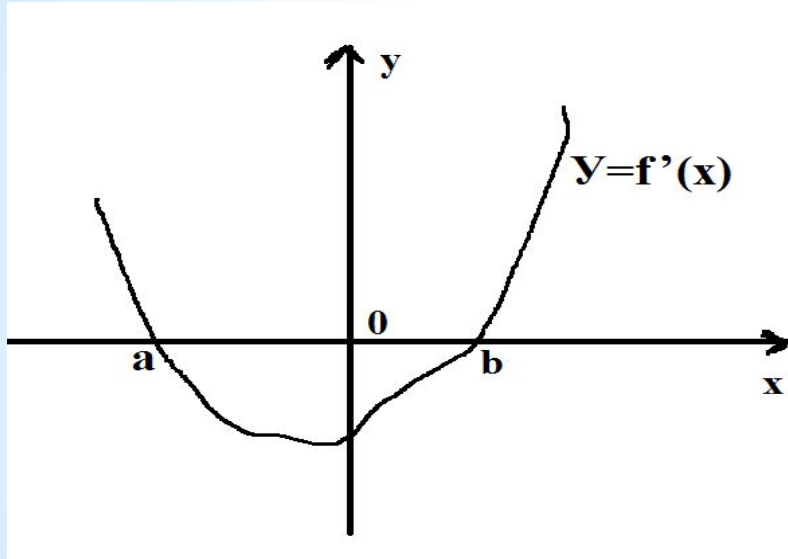


Рис.3

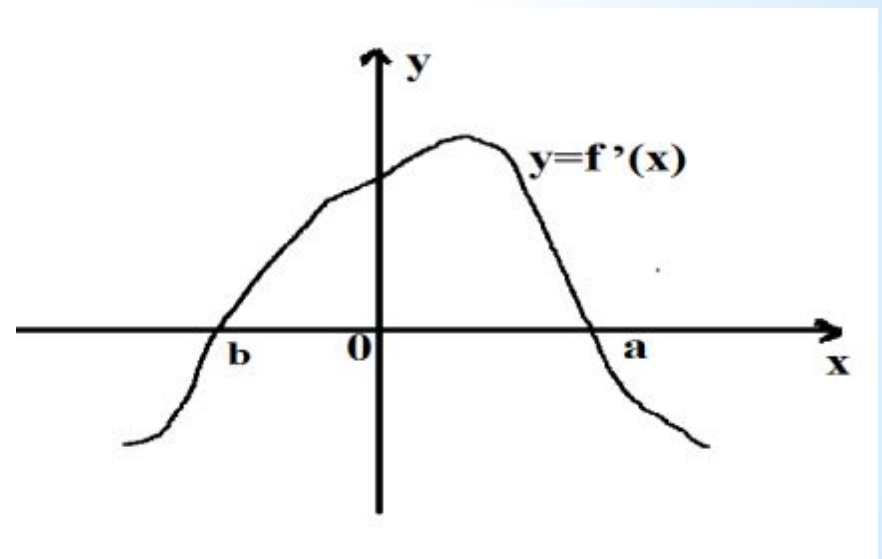


Рис.4

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает наибольшее и наименьшее значение либо на концах отрезка, либо в тех точках, где производная равна нулю (или не существует). Поэтому **один из способов** отыскать наибольшее и наименьшие значения функции на отрезке - посчитать ее значения на концах отрезка и в точках, где производная равна нулю (или не существует), и выбрать из них наибольшее или наименьшее значение.

Второй способ отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке - исследовать функцию на монотонность (другими словами, на возрастание - убывание), построить эскиз и посчитать значения функции в нужных точках.

Точки максимума могут как совпадать, так и не совпадать с точками, где функция принимает наибольшее значение. То же можно сказать про точки, где функция принимает наименьшее значение.

Задачи с решениями

Задача №1. Найдите наименьшее значение функции $y=(x+7)e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$

Решение.

1-й способ.

Найдем значения функции на концах отрезка:

$$y(-9) = (-9 + 7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27}, \text{ так как } e = 2,7;$$

$$y(-7) = (-7 + 7)e^{-7+8} = 0.$$

Найдем производную:

$$Y' = ((x+7)e^{x+8})' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)(e^{x+8})' = 1e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}.$$

Найдем значение x , при которых производная функции равна нулю:

$$(x + 8)e^{x+8} = 0; x+8=0; x=-8.$$

Это значение $x=-8$ принадлежит промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

Найдем значение функции в точке, где производная равна нулю:

$$Y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$$

Выберем наименьшее значение функции из чисел $-\frac{20}{27}$; -1 ; 0 ; наименьшим является -1 .

Ответ: -1 .

2-й способ.

Найдем производную $y' = ((x+7)e^{x+8})' = (x+8)e^{x+8}$.

Найдем значение x , при которых производная функции равна нулю:

$$(x+8)e^{x+8}=0; x+8=0; x=-8.$$

Проверим, принадлежат ли эти значения x промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

Нарисуем числовую ось и нанесем на неё нули ($x = -8$) и знаки производной, которые определяются с помощью пробной точки (см. рис. 5).

$$y'(-9) = (-9+8)e^{-9+8} = -1e^{-1} < 0;$$

$$y'(-7) = (-7+8)e^{-7+8} = 1e > 0.$$

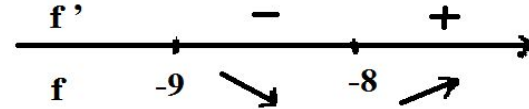


Рис. 5

Чертим эскиз графика функции (см. рис. 6).

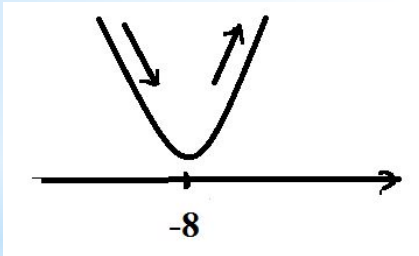


Рис. 6

По рисунку видно, что наименьшее значение функция принимает в точке $x = -8$.

Вычисляем значение функции в точке $x = -8$:

$$y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$$

Ответ :-1.

Задача №2. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\sqrt{2} \sin x + 3\sqrt{2}x - 15$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Решение.

Найдем производную:

$$y'(x) = (3\sqrt{2} \sin x + 3\sqrt{2}x - 15)' = 3\sqrt{2} \cos x + 3\sqrt{2} + 0 = 3\sqrt{2} \cos x + 3\sqrt{2}.$$

Определим знаки производной $y'(x) = 3\sqrt{2} \cos x + 3\sqrt{2}$. Это выражение не отрицательно при всех значениях x , так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$ (всегда выполняется $3\sqrt{2} \cos x + 3\sqrt{2} \geq 3\sqrt{2}(-1) + 3\sqrt{2} = 0$). Следовательно, $y'(x) \geq 0$, и функция возрастает при всех значениях x . Наименьшее значение возрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка (при наименьшем возможном значении аргумента $x=0$).

Вычислим значение функции в точке $x=0$.

$$y = 3\sqrt{2} \sin x + 3\sqrt{2}x - 15 = 3\sqrt{2} \sin 0 + 3\sqrt{2} * 0 - 15 = -15.$$

Ответ: -15 .

Задача №3. Найдем наибольшее значение функции
 $y = 4\sqrt{2} \cos x + 4x - \pi - 1$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Решение:

Найдем значение функции на концах отрезка:

$$y(0) = 4\sqrt{2} \cos 0 + 4 \cdot 0 - \pi - 1 = 4\sqrt{2} - \pi - 1 \approx 6 - 3,1 - 1 = 1,9 ;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi - 1 = 0 + \pi - 1 \approx 2,1.$$

Найдем производную:

$$y' = (4\sqrt{2} \cos x + 4x - \pi - 1)' = -4\sqrt{2} \sin x + 4.$$

Найдем значения на заданном промежутке, при которых производная равна нулю : $-4\sqrt{2} \sin x + 4 = 0$, $\sqrt{2} \sin x = 1$; $\sin x = 1/\sqrt{2}$.

Так как x принадлежит отрезку $[0; \frac{\pi}{2}]$, нам подходит $x = \frac{\pi}{4}$.

Найдем значения функции при $x = \frac{\pi}{4}$.

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi - 1 = 3$$

Выберем наибольшее значение . Наибольшим является 3.

Ответ: 3.

Задача №4. Найдите наибольшее значение функции $y = 16x - 16\tan x + 4\pi - 56$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

Решение:

Найдем производную:

$$y' = (16x - 16\tan x + 4\pi - 56)' = 16 - 16 \cos^{-2} x - 0 = \\ = (16\cos^2 x - 16) / \cos^2 x .$$

Определим знаки производной: $16(\cos^2 x - 1) / \cos^2 x \leq 0$.

Это выражение неположительное, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$. Следовательно, $y'(x) \leq 0$, и функция убывает при всех допустимых значениях. Наибольшее значение функция принимает на левом конце заданного промежутка, то есть при наименьшем возможном значении аргумента $x = -\frac{\pi}{4}$.

Вычислим значение функции в точке $x = -\frac{\pi}{4}$.

$$Y(-\frac{\pi}{4}) = 16(-\frac{\pi}{4}) - 16\tan(-\frac{\pi}{4}) + 4\pi - 56 = -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$$

Ответ: -40 .

Первообразная

Задача №5. На рис. 7 изображён график функции $y=F(x)$, где $F(x)$ - первообразная функции $y=f(x)$.

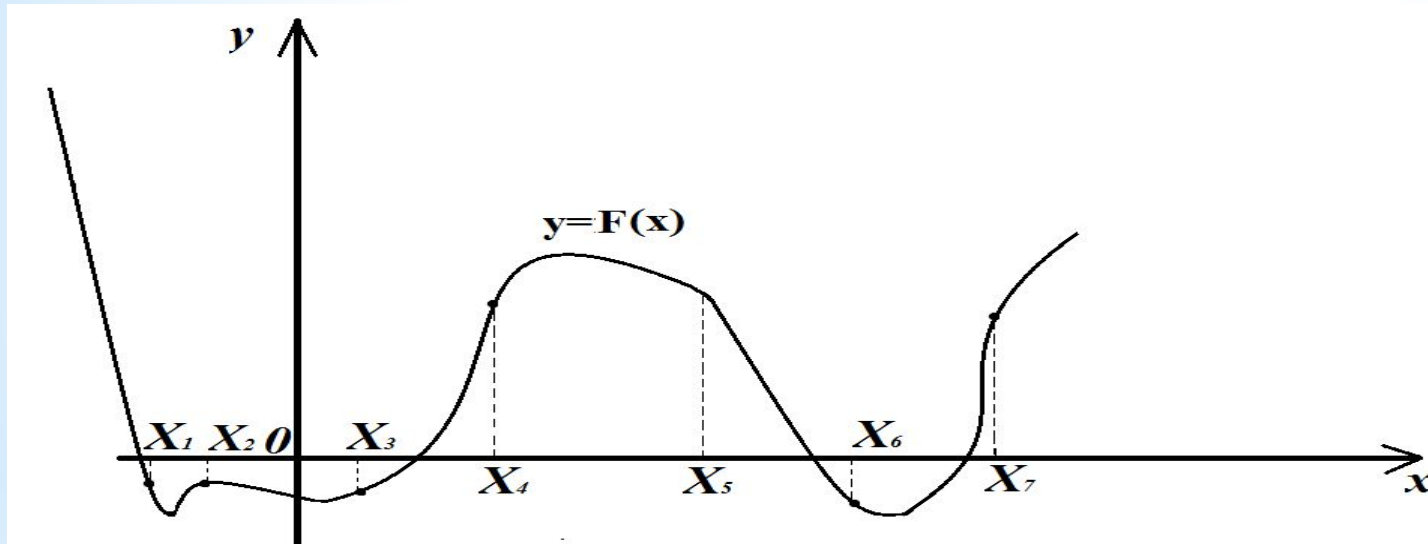


Рис. 7

Найдите среди точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ те, в которых $f(x)$ положительна. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение:

Функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, поэтому $f(x) > 0$ на всех интервалах, где $F(x)$ возрастает. Находим по рисунку, какие точки принадлежат промежуткам возрастания $F(x)$ (исключая лишь концы промежутков, где $F'(x) = f(x) = 0$). Это точки x_3, x_4, x_7 . Их количество равно 3.

Ответ: 3.

3. Площадь криволинейной трапеции и определенный интеграл

Площадь S криволинейной трапеции можно вычислить с помощью первообразной функции по формуле $S = \int_a^B f(x) dx = F(B) - F(a)$

Задача №6. На рисунке 8 изображен график некоторой функции $y=f(x)$.
Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1$.
Найдите площадь заштрихованной фигуры.

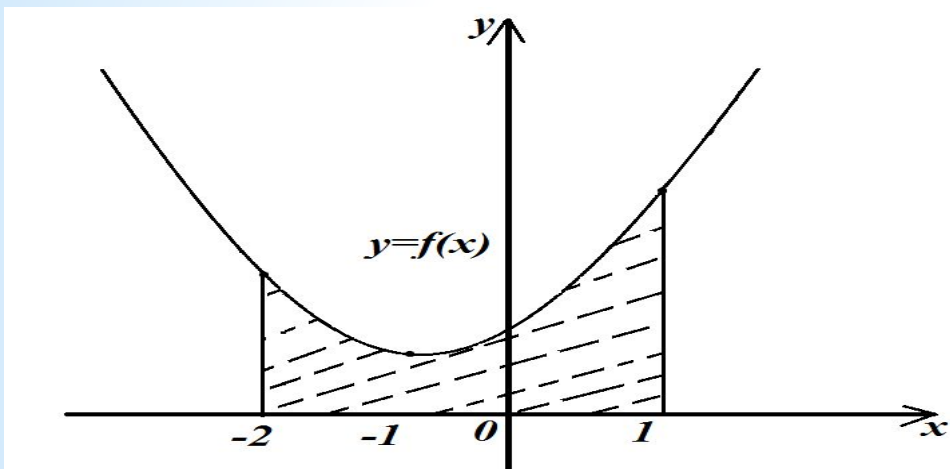


Рис. 8

Решение:

Криволинейная трапеция на рис 8 ограничена отрезками прямых $x=-2$, $x=1$ и графиком функции $y=f(x)$. Для вычисления площади фигуры используем формулу $S = F(b) - F(a)$. В нашем случае $a=-2$, $b = 1$.

$$S = F(1) - F(-2) = \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 \right) - \left(\frac{2(-2)^3}{3} + 2(-2)^2 + 3(-2) - 1 \right) = 9.$$

Ответ: 9.

Задача №7. На рис. 9 изображен график функции $y = f(x) = 5 - |x+1| - |x-2|$. Пользуясь графиком, вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

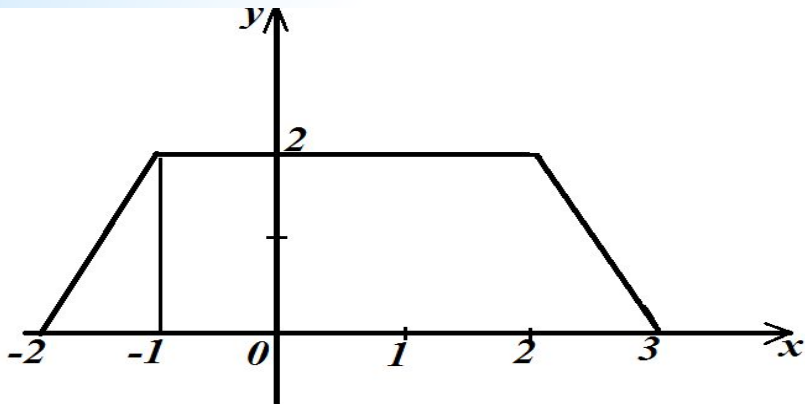


Рис. 9

Решение:

Найдем определенный интеграл, посчитав площадь трапеции АСВД (смотри рис 10)

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = S_{\text{АСВД}} = \frac{BC+AD}{2} = \frac{3+4}{2} * 2 = 7$$

Ответ: 7

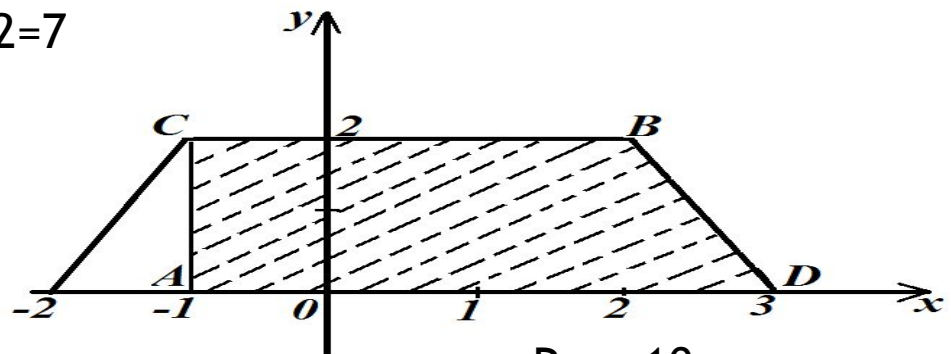


Рис. 10

Задача №8. На рис. 11 изображен график функции $y=f(x)$., определенной на интервале $(-5; 8)$. Найдите количество точек в которых касательная к графику функции $F(x)$, которая является первообразной для функции $f(x)$, параллельна прямой $y=3x+8$ или совпадает с ней.

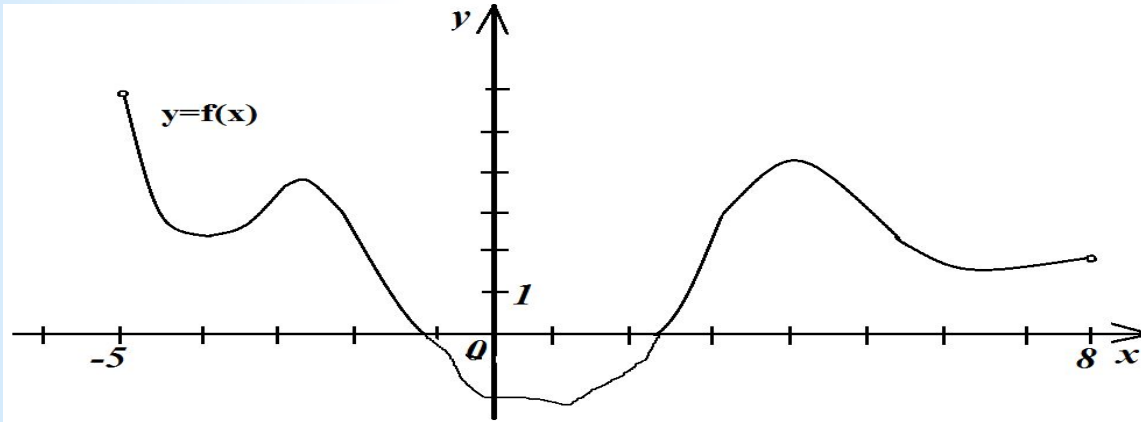


Рис. 11

Решение:

Функция $y=f(x)$ является производной для $F(x)$, то есть $f(x)=F'(x)$. Значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания: $f(x)=F'(x)=3$. Проведем прямую $y=3$, параллельную оси Ox (рис 12). Она пересекает график в пяти точках. В этих точках касательная к графику функции $y=F(x)$ параллельна прямой $y=3x+8$ или совпадает с ней.

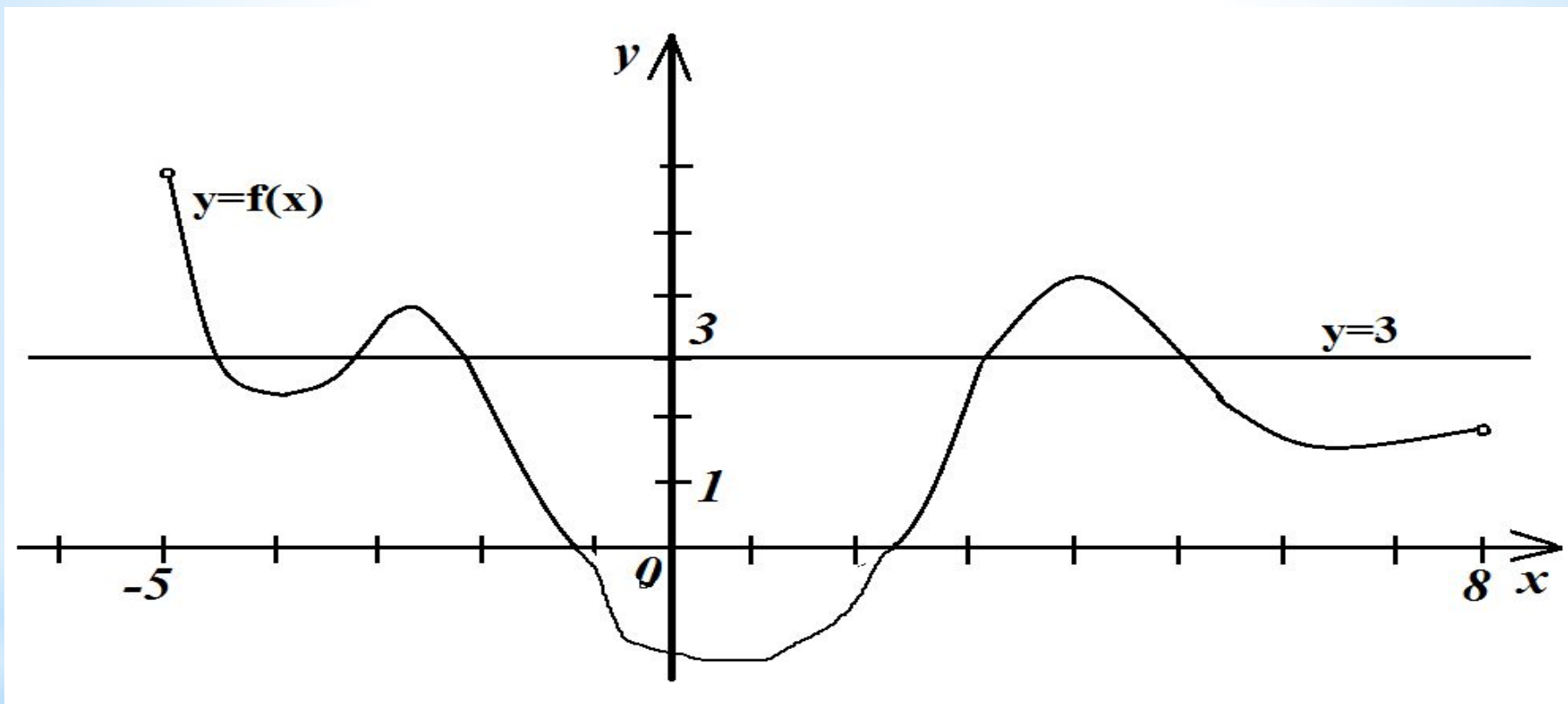


Рис. 12

Ответ: 5.