Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона-Лейбница.

ПОДГОТОВИЛА: ПРЕПОДАВАТЕЛЬ
ГБПОУ «ЧГПГТ ИМ.А.В.ЯКОВЛЕВА»
ПИЛИПЕНКО Е.Б.

Понятие первообразной

- Функция *F(x)* называется первообразной функции *f(x)* на некотором промежутке, если для всех *x* из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.
- Операцию нахождения первообразной называют интегрированием.

Основное свойство первообразных:

- общий вид первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I есть $F(x)+C$,
- где C - произвольная постоянная, а $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I.

Понятие неопределенного интеграла

- Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ называется функция $F(x)+C$, содержащая произвольное постоянное C, дифференциал которой равен подинтегральному выражению $f(x)dx$.
- Определенный интеграл – это разность значений любой первообразной функции для $f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

где

- $\int$- знак интеграла,
- $f(x)dx$ -подынтегральное выражение,
- x-переменная интегрирования,
- a и b – пределы интегрирования,
- $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Свойства определенного интеграла

- 1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла.
- 2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.
- 3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- 4.Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых.
- 5.Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Пример 1.

- Вычислить :

$$\int_2^3 3x^2\,dx$$

- Решение:
- Применяя формулу Ньютона-Лейбница и свойства определенного интеграла, получим

$$\int_2^3 3x^2\,dx = 3\int_2^3 x^2\,dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19$$

- Ответ: 19.

Пример 2.

- Дано уравнение скорости движения тела $u = t^2 - 4t + 1 \left(\frac{м}{с}\right)$
- Найти уравнение пути, если тело за первые 3 с прошло путь 24 м.
- Решение:
- Уравнение пути s(t) находится интегрированием:

$$u = \frac{dS}{dt} \Longrightarrow S(t) = \int dS = \int u \cdot dt$$

$$S(t) = \int u\, dt$$

$$S(t) = \int (t^2 - 4t + 1)\, dt = \int t^2\, dt - 4\int t\, dt + \int dt = \frac{t^3}{3} - 4\frac{t^2}{2} + t + C$$

продолжение

$$S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + t + C.$$

- Найд $24 = \frac{3^2}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 + C$ ельных условий при t=3с, S=24м:

$$\Rightarrow C = 30$$

- 24=9−18+3+C.

- Ответ: уравнение пути имеет вид:

$$S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + t + 30\ (\text{м}).$$

Пример 3

- Найти $\int e^{-2x}dx$
- если при x=0 первообразная функции равна 5,5.
- Решение:

$$\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$$

- Найдем *C* исходя из условий задачи при x=0 и F(x)=5,5:

$$5{,}5 = -\frac{1}{2}e^{0} + C \Rightarrow C = 6.$$

- Ответ: $-\frac{1}{2}e^{-2x} + 6.$