Некоторые приемы решения целых уравнений

«Уравнение представляет собой наиболее серьезную и важную вещь в математике»

Лодж О.

Обсудим способы решения уравнений вида Pn(x) = 0, где Pn(x) - многочлен n-й степени

Приведем некоторые утверждения о корнях многочлена Pn(x):

1. Многочлен n-й степени имеет не более n корней (с учетом их кратностей). Например, многочлен третьей степени не может иметь четыре корня.
2. Многочлен нечетной степени имеет хотя бы один корень. Например, многочлены первой, третьей, пятой и т. д. степени имеют хотя бы один корень. Многочлены четной степени корней могут и не иметь.
3. Если на концах отрезка [a; b] значения многочлена имеют разные знаки (т. е. $Pn(a) \cdot Pn(b) < 0$), то на интервале (a; b) находится хотя бы один корень. Это утверждение широко используется для приближенного вычисления корней многочлена.
4. Если число с является корнем многочлена Pn(x), то этот многочлен можно представить в виде произведения $Pn(x) = (x - c)Pn\text{-}1(x)$, где Pn-1(x) - многочлен (n - 1)-й степени. Другими словами, многочлен Pn(x) можно разделить без остатка на двучлен (x - c). Это позволяет уравнение n-й степени сводить к уравнению (n - 1)-й степени (понижать степень уравнения).
5. Если многочлен со всеми целыми коэффициентами (причем свободный член $a0 \neq 0$) имеет целый корень с, то этот корень является делителем свободного члена a0. Такое утверждение позволяет подобрать целый корень многочлена (если он есть).

Для решения целых уравнений *важно уметь определять вид уравнения, знать приемы и методы их решения.*

Простейшие: по готовым формулам

Разложение на множители: группировка, теорема о корне многочлена, теорема Безу

Метод введения новой переменной.

Графический: построение графиков функций и нахождение абсциссы их точек пересечения.

Решим уравнение: $x^4+6x^3+5x^2-12x+3=0$

Решение

Уравнения 4-ой степени, которые сводятся к квадратным

$5x^2=9x^2-4x^2$

$x^4+6x^3+9x^2-4x^2-12x+3=0$

$(x^4+6x^3+9x^2)-(4x^2+12x)+3=0$

$(x^2+3x)^2-4(x^2+3x)+3=0$

Пусть $t=x^2+3x$, тогда

$t^2-4t+3=0$

$t1=\frac{4+2}{2}=3$ $\quad t2=1$

$x^2+3x=3$

$x^2+3x=1$

$x^2+3x-3=0$

$x^2+3x-1=0$

$x1,2=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

$X3,4=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ $\quad \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

<u>Дополнительное задание:</u> $x^4+4x^3-8x+4=0$

Решим уравнение $x^3 - 7x^2 + 11x - 2 = 0$.

<u>Решение:</u>

Если это уравнение имеет целый корень, он является делителем свободного члена (-2), т. е. равняется одному из чисел: ±1, ±2. Проверка показывает, что корнем уравнения является число 2. Тогда многочлен $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ можно представить в виде произведения $P_3(x) = (x - 2)P_2(x)$, т. е. многочлен $P_3(x)$ можно без остатка разделить на двучлен $(x - 2)$. Выполним такое деление «уголком».

Напомним, что деление «уголком» осуществлялось таким образом, чтобы на каждом промежуточном этапе деления исчезала старшая степень промежуточного делимого.

Таким образом, мы разложили левую часть уравнения на множители:

$(x - 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$.

$x - 2 = 0$ $x_1 = 2$. $x^2 - 5x + 1 = 0$ дает еще два корня $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

<u>Ответ:</u> 2, $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

<u>Дополнительное задание:</u> $x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = 0$,

$x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

Решим уравнение: $x^4-7x^3+8x^2-7x+1=0$

Решение:

Отличительной особенностью этого уравнения является по парное равенство коэффициентов относительно среднего члена уравнения(коэффициент при $\mathbf{x^4}$ и свободный член равны 1; коэффициент при $\mathbf{x^3}$ и $\mathbf{x}$ равны **-7 и -7** соответственно)

Для решения уравнения такого типа существует следующий приём. Прежде всего убедится, что x=0, не является корнем уравнения. Разделим все члены уравнения на $\mathbf{x^2}$.

$x^2 - 7x + 8 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}$ **=0**, сгруппируем $(x^2+\frac{1}{x^2})-7(x+\frac{1}{x})+8=0$

Пусть $x+\frac{1}{x}=y$,тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=y^2-2$

$y^2-7y+6=0$, $y1=6$; $y2=1$

$x+\frac{1}{x}=6$ $x+\frac{1}{x}=1$ $x^2-x+1=0$ не имеет корней

$x^2-6x+1=0$ $x_{1,2}=3\pm2\sqrt{2}$ Ответ: $3\pm2\sqrt{2}$.

Учитывая закономерности в коэффициентах этого уравнения, подобные уравнения называют **возвратными, или симметричными.**

Дополнительные задания:

$x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$

$x^4+2x^3-5x^2-2x+1=0$

$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$

$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$

$2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$

$X^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$

Решим уравнение $x^7+2x^6-5x^5-13x^3-5x^2+2x+1=0$

Решение

Симметричное уравнение нечётной степени имеет хотя бы один корень(делитель свободного члена 1:+1,-1). Проверка показывает, что корнем является X=-1. Поделим «углом» на (x+1)

$(x+1)(x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1)=0$

$x=-1$, $x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1=0$-симметричное уравнение чётной степени, поделим на x3

Имеем $x^3+x^2-6x-7-6*\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$ Сгруппируем: $(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^2+\frac{1}{x^2})-6(x+\frac{1}{x})-7=0$

Пусть $x+\frac{1}{x}=y$,тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=y^2-2$ $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$

$$y^3-9y+y^2-9=0$$
$$(y+1)(y^2-9)=0,$$
$$y=-1,$$
$$y=\pm 3.$$

$x+\frac{1}{x}=-1$

$x^2+x+1=0$

Не имеет корней

$x+\frac{1}{x}=3$

$x^2-3x+1=0$

$x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$x+\frac{1}{x}=-3$

$x^2+3x+1=0$

$x_{4,5}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Ответ: -1 $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ $x_{4,5}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Решим уравнение: $(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(x^{10}+1)=10x^9$

$x^{10}+1+x^{12}+x^2+x^{14}+x^4+x^{16}+x^6+x^{18}+x^8=10x^9$, делим на $x^9 \neq 0$

$$x+\frac{1}{x^9}+x^3+\frac{1}{x^7}+x^5+\frac{1}{x^5}+x^7+\frac{1}{x^3}+x^9+\frac{1}{x}=10, \textit{группируем}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+\left(x^9+\frac{1}{x^9}\right)=10,$$

Используя неравенство $a+\frac{1}{a}\geq 2,$ для a>0, неравенство выполняется при a=1

Имеем x=1

Ответ:1

Решим уравнение $24x^3 - 10x^2 - 3x + 1 = 0.$

Решение:

Проверка показывает, что данное уравнение с целыми коэффициентами не имеет целых корней ±1 (делители свободного члена). Поэтому уравнение вообще не имеет целых корней. Предположим, что корни являются рациональными числами.

Введем новую переменную $y = 1/x$, откуда $x = 1/y$. Тогда уравнение имеет вид: ил $\frac{24}{y^3}-\frac{10}{y^2}-\frac{3}{y}+1=0,$ $y + 24 = 0$. Попробуем подобрать корень этого уравнения среди делителей числа 24 (свободный член). Проверка показывает, что $y = 2$ - корень этого уравнения. Далее понижаем степень этого уравнения:

$$\begin{array}{l|l}
y^3-3y^2-10y+24 & y-2 \\ \cline{2-2}
y^3-2y^2 & y^2-y-12 \\ \cline{1-1}
\quad -y^2-10y & \\
\quad -y^2+2y & \\ \cline{1-1}
\qquad -12y+24 & \\
\qquad -12y+24 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Корнями квадратного уравнения $y^2 - y - 12 = 0$ являются числа $y = -3$ и $y = 4$. Вернемся теперь к старой неизвестной $x = 1/y$ и найдем три корня данного уравнения:

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{3},\ x_3=\frac{1}{4}.$$

Решим уравнение $x^4 – x^3 – 12x^2 + 7x - 1 = 0.$

<u>Решение:</u>

$\mathbf{x^4 – x^3 – 12x^2 + 7x - 1} =(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx- 1)=x^4 + bx^3 – x^2 + ax^3 + abx^2 - ax + x^2 + bx - 1 = \mathbf{x^4 + (a + b)x^3 + abx^2 + (b - a)x -1}$,

$x^4 – x^3 – 12x^2 + 7x - 1 = x^4 + (a + b)x^3 + abx^2 + (b - a)x -1.$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях х данного и полученного многочленов. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} -1 = a + b, \\ -12 = ab, \\ 7 = b - a. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы найдем a = -4 и b = 3. Проверим, что эти значения удовлетворяют и второму уравнению.

Тогда данное уравнение будет иметь вид: $(x^2 - 4x + 1)(x^2 + 3x -1) = 0.$

Уравнение $x^2- 4x + 1 = 0$ имеет корни

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

уравнение $x^2 + 3x - 1 = 0$ – корни

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

<u>Дополнительное задание. 1)</u> $x^4 + x^3 – 6x^2 - 5x + 3 = 0.$

2) При каких числах *а* и *в* многочлен $ax^4 + вx^3 + 17x^2 - 12x + 20$ делится без остатка на многочлен $(x – 2).^2$

Решим уравнение $x^5 + 2x - 3 = 0$.

При решении уравнения воспользуемся свойством монотонности функции:

если функция y= f (x) убывает, а функция y=g(x) возрастает и если уравнение f (x)=g(x) имеет корень, то только один.

$x^5+2x-3 = 0$,

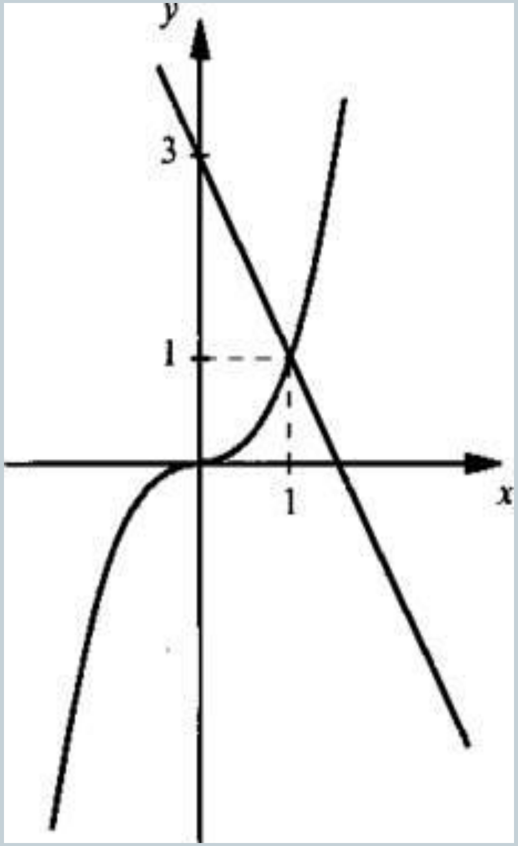
$x^5 =-2x+3$.

$y=x^5$ - возрастающая, а

$y=-2x+3$- убывающая,

то корень у заданного уравнения один, и этим корнем является значение x=1. Это хорошо видно из приведенного рисунка.

Ответ: x = 1.



Решим уравнение $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40$

<u>Решение:</u>

Уравнение вида $\boldsymbol{(x+a)(x+в)(x+c)(x+к)=p}$ *сводится к квадратному, если*
$\boldsymbol{a+c=в+к}$ ***или*** $\boldsymbol{a+в=c+к}$ *и т. д.*

1+5=2+4, мы видим симметрию левой части.
$\mathbf{(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)=40,}$
$x^2+6x+5=t,$
$t(t+3)=40,$ $\mathbf{t^2+3t-40=0}$
$t=-8$ или $t=5$.

Получаем $x^2+6x+5=5$, где $x=0$, $x=-6$
$x^2+6x+5=-8$, не имеет корней
Ответ: -6,0.

<u>Дополнительное задание:</u> $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)=-96,$
$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=-297,$
$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-15=0$

Решим уравнение (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2

Решение:

$2\cdot 12 = 3\cdot 8$, мы видим симметрию левой части

Произведение 1 и 4, 2 и 3 множителей заменим квадратными трехчленами

$\mathbf{(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x +24)= 4x^2}$.

Обе части уравнения разделим на $x^2 \neq 0$ и получим уравнение

$$\mathbf{(x+24/x +14)(x+24/x +11)=4}.$$

Пусть $x+24/x = y$, тогда $\mathbf{(y+14)(y+11)=4}$,

Получим квадратное уравнение $\mathbf{y^2 +25y+150=0}$, $y_1 = — 10$ *и* $y_2 = — 15$.

x+24/x=-10

$x^2+10x+24=0$

$x_1=- 4$, $x_2= -6$

x+24/x=-15

$x^2+15x+24=0$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$$

<u>Дополнительное задание:</u> $(x+4)(x-2)(x+5)(x-10)+54x^2 =0$

Решим уравнение $(x+6)^4+(x+4)^4=82$.

<u>Решение :</u>

Уравнение вида $\boldsymbol{(x + a)^4+(x + в)^4=c}$, *решается заменой* $\boldsymbol{x = t -(a+b):2}$.

Введем замену $\boldsymbol{x = t -(6+4):2=t-5}$. Тогда уравнение имеет следующий вид:

$(t-5+6)^4+(t-5+4)^4=82$,

$((t^2+1)^2)^2+((t-1)^2)^2=82$,

$(t^2+2 t +1)^2+(t^2-2 t +1)^2=82$,

$\boldsymbol{2t^4+12t^2-80=0}$**,**

$\boldsymbol{t^4+6t^2-40=0}$, пусть $t^2=m$, $m\geq0$,

$m^2+6 m-40=0$,

$m_1=4$, $m_2=-10$- не удовлетворяет условию,

$t^2=4$, $t=+2,-2$,

$x_1=-3, x_2=-7$.

Ответ:-3,-7.

<u>Дополнительное задание:</u> $(x+2)^4+x^4=82$.

Решим уравнение $x^3 - 2x - (x^2 + 2)a - 2a^2x = 0$.

Решение:

Отметим, что в это уравнение *переменная x* входит *в третьей степени* (и ниже), *переменная a - во второй степени* (и ниже). Поэтому удобно рассматривать такое уравнение как квадратное *по переменной a.*

Запишем его в виде $\mathbf{2xa^2 + (x^2 + 2)a - (x^3 - 2x) = 0}$.

Найдем $D = (x^2 + 2)^2 + 8x(x^3 - 2x) = (3x^2 - 2)^2$ и корни и $a = \dfrac{x^2 - 2}{2x}$, $a = -x$.

Вернемся к старой неизвестной x.

Уравнение $a = \dfrac{x^2 - 2}{2x}$, или $x^2 - 2ax - 2 = 0$, имеет корни $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 2}$.

Уравнение $a = -x$ имеет корень $x_3 = -a$.

Ответ: $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 2}$. $x_3 = -a$.

«Мне приходится делить свое время между *политикой и уравнениями.*

Однако *уравнение*, по-моему, гораздо важнее, потому что *политика существует только для данного момента, а <u>уравнение будет существовать вечно</u>».*

ЭНШТЕЙН А.