

# Некоторые приемы решения целых уравнений



*«Уравнение представляет собой наиболее серьезную и важную вещь в математике»*

Лодж О.

Обсудим способы решения уравнений вида  $P_n(x) = 0$ , где  $P_n(x)$  - многочлен  $n$ -й степени

# Приведем некоторые утверждения о корнях многочлена $P_n(x)$ :



1. Многочлен  $n$ -й степени имеет не более  $n$  корней (с учетом их кратностей).  
Например, многочлен третьей степени не может иметь четыре корня.
2. Многочлен нечетной степени имеет хотя бы один корень. Например, многочлены первой, третьей, пятой и т. д. степени имеют хотя бы один корень. Многочлены четной степени корней могут и не иметь.
3. Если на концах отрезка  $[a; b]$  значения многочлена имеют разные знаки (т. е.  $P_n(a) \cdot P_n(b) < 0$ ), то на интервале  $(a; b)$  находится хотя бы один корень. Это утверждение широко используется для приближенного вычисления корней многочлена.
4. Если число  $c$  является корнем многочлена  $P_n(x)$ , то этот многочлен можно представить в виде произведения  $P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x)$ , где  $P_{n-1}(x)$  - многочлен  $(n - 1)$ -й степени. Другими словами, многочлен  $P_n(x)$  можно разделить без остатка на двучлен  $(x - c)$ . Это позволяет уравнение  $n$ -й степени сводить к уравнению  $(n - 1)$ -й степени (понижать степень уравнения).
5. Если многочлен со всеми целыми коэффициентами (причем свободный член  $a_0 \neq 0$ ) имеет целый корень  $c$ , то этот корень является делителем свободного члена  $a_0$ . Такое утверждение позволяет подобрать целый корень многочлена (если он есть).

Для решения целых уравнений важно уметь определять вид уравнения, знать приемы и методы их решения.



Простейшие: по готовым формулам

Разложение на множители: группировка, теорема о корне многочлена, теорема Безу

Метод введения новой переменной.

Графический: построение графиков функций и нахождение абсциссы их точек пересечения.

# Решим уравнение: $x^4+6x^3+5x^2-12x+3=0$



## Решение

Уравнения 4-ой степени, которые сводятся к квадратным

$$x^4+6x^3+9x^2-4x^2-12x+3=0$$
$$(x^4+6x^3+9x^2)-(4x^2+12x)+3=0$$

Пусть  $t=x^2+3x$ ,

тогда  $t^2-4t+3=0$

$$t_1 = \frac{-2}{2} = -1 \quad t_2 = 3$$

$$x^2+3x=3$$

$$x^2+3x-3=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

**Отв**  $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

**Т:**

Дополнительное задание:  $x^4+4x^3-8x+4=0$

# Решим уравнение $x^3 - 7x^2 + 11x - 2 = 0$ .



## Решение:

Если это уравнение имеет целый корень, он является делителем свободного члена (-2), т. е. равняется одному из чисел:  $\pm 1, \pm 2$ . Проверка показывает, что корнем уравнения является число 2. Тогда многочлен  $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$  можно представить в виде произведения  $P_3(x) = (x - 2)P_2(x)$ , т. е. многочлен  $P_3(x)$  можно без остатка разделить на двучлен  $(x - 2)$ . Выполним такое деление «уголком».

*Напомним, что деление «уголком» осуществлялось таким образом, чтобы на каждом промежуточном этапе деления исчезала старшая степень промежуточного делимого.*

Таким образом, мы разложили левую часть уравнения на множители:

$$(x - 2)(x^2 - 5x + 1) = 0 .$$

$x - 2 = 0$   $x_1 = 2$ .  $x^2 - 5x + 1 = 0$  дает еще два корня

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Ответ: 2,

Дополнительное задание:  $x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = 0$ ,

$$x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$$

# Решим уравнение: $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$

## Решение:

Отличительной особенностью этого уравнения является по парное равенство коэффициентов относительно среднего члена уравнения (коэффициент при  $x^4$  и свободный член равны 1; коэффициент при  $x^3$  и  $x$  равны  $-7$  и  $-7$  соответственно)

Для решения уравнения такого типа существует следующий приём. Прежде всего убедитесь, что  $x=0$ , не является корнем уравнения. Разделим все члены уравнения на  $x^2$ .

$$x^2 - 7x + 8 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \text{ сгруппируем } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

Пусть  $x + \frac{1}{x} = y$ , тогда  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$   
 $y^2 - 7y + 6 = 0, \quad y_1 = 6; \quad y_2 = 1$

$x + \frac{1}{x} = 6$      $x + \frac{1}{x} = 1$      $x^2 - x + 1 = 0$     не имеет корней  
 $x^2 - 6x + 1 = 0$      $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$     **Ответ:  $3 \pm 2\sqrt{2}$ .**

### Дополнительные задания:

$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$                        $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$   
 $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$                        $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$   
 $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$                        $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

Учитывая закономерности в коэффициентах этого уравнения, подобные уравнения называют **возвратными, или симметричными.**

# Решим уравнение $x^7+2x^6-5x^5-13x^3-5x^2+2x+1=0$



## Решение

Симметричное уравнение нечётной степени имеет хотя бы один корень (делитель свободного члена 1: +1, -1). Проверка показывает, что корнем является  $X=-1$ . Поделим «углом» на  $(x+1)$

$$(x+1)(x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1)=0$$

$x=-1$ ,  $x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1=0$  - симметричное уравнение чётной степени, поделим на  $x^3$

Имеем  $x^3+x^2-6x-7-6*\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$  Сгруппируем:  $(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^2+\frac{1}{x^2})-6(x+\frac{1}{x})-7=0$

Пусть  $x+\frac{1}{x}=y$ , тогда  $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=y^2-2$   $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$

$$y^3-9y+y^2-9=0$$

$$(y+1)(y^2-9)=0,$$

$$y=-1,$$

$$y=\pm 3.$$

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

$$x^2+x+1=0$$

Не имеет корней

$$x+\frac{1}{x}=3$$

$$x^2-3x+1=0$$

$$x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x+\frac{1}{x}=-3$$

$$x^2+3x+1=0$$

$$x_{4,5}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Ответ:  $-1$   $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$   $x_{4,5}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

# Решим уравнение: $(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(x^{10}+1)=10x^9$



$$x^{10}+1+x^{12}+x^2+x^{14}+x^4+x^{16}+x^6+x^{18}+x^8=10x^9, \text{ делим на } x^9 \neq 0$$

$$x + \frac{1}{x^9} + x^3 + \frac{1}{x^7} + x^5 + \frac{1}{x^5} + x^7 + \frac{1}{x^3} + x^9 + \frac{1}{x} = 10, \text{ группируем}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + \left(x^7 + \frac{1}{x^7}\right) + \left(x^9 + \frac{1}{x^9}\right) = 10,$$

Используя неравенство  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ , для  $a > 0$ , неравенство выполняется при  $a=1$

Имеем  $x=1$

Ответ: 1



# Решим уравнение $24x^3 - 10x^2 - 3x + 1 = 0$ .



## Решение:

Проверка показывает, что данное уравнение с целыми коэффициентами не имеет целых корней  $\pm 1$  (делители свободного члена). Поэтому уравнение вообще не имеет целых корней. Предположим, что корни являются рациональными числами.

Введем новую переменную  $y = 1/x$ , откуда  $x = 1/y$ . Тогда уравнение имеет вид:

или  $\frac{24}{y^3} - \frac{10}{y^2} - \frac{3}{y} + 1 = 0$ ,  $y^3 - 10y^2 - 3y + 24 = 0$ . Попробуем подобрать корень этого уравнения среди делителей числа 24 (свободный член). Проверка показывает, что  $y = 2$  - корень этого уравнения. Далее понижаем степень этого уравнения:

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 3y^2 - 10y + 24 & y - 2 \\ \hline y^3 - 2y^2 & \\ \hline -y^2 - 10y & \\ -y^2 + 2y & \\ \hline -12y + 24 & \\ -12y + 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Корнями квадратного уравнения  $y^2 - y - 12 = 0$  являются числа  $y = -3$  и  $y = 4$ . Вернемся теперь к старой неизвестной

$x = 1/y$  и найдем три корня данного уравнения:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{4}$$

# Решим уравнение $x^4 - x^3 - 12x^2 + 7x - 1 = 0$ .



## Решение:

$$\begin{aligned}x^4 - x^3 - 12x^2 + 7x - 1 &= (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1) = x^4 + bx^3 - x^2 + ax^3 + abx^2 - ax + \\ &\quad x^2 + bx - 1 = x^4 + (a + b)x^3 + abx^2 + (b - a)x - 1, \\ x^4 - x^3 - 12x^2 + 7x - 1 &= x^4 + (a + b)x^3 + abx^2 + (b - a)x - 1.\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  данного и полученного многочленов. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} -1 = a + b, \\ -12 = ab, \\ 7 = b - a. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы найдем  $a = -4$  и  $b = 3$ . Проверим, что эти значения удовлетворяют и второму уравнению.

Тогда данное уравнение будет иметь вид:  $(x^2 - 4x + 1)(x^2 + 3x - 1) = 0$ .

Уравнение  $x^2 - 4x + 1 = 0$  имеет корни

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

уравнение  $x^2 + 3x - 1 = 0$  – корни

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Дополнительное задание. 1)  $x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x + 3 = 0$ .

2) При каких числах  $a$  и  $b$  многочлен  $ax^4 + bx^3 + 17x^2 - 12x + 20$  делится без остатка на многочлен  $(x - 2)$ .<sup>2</sup>

# Решим уравнение $x^5 + 2x - 3 = 0$ .

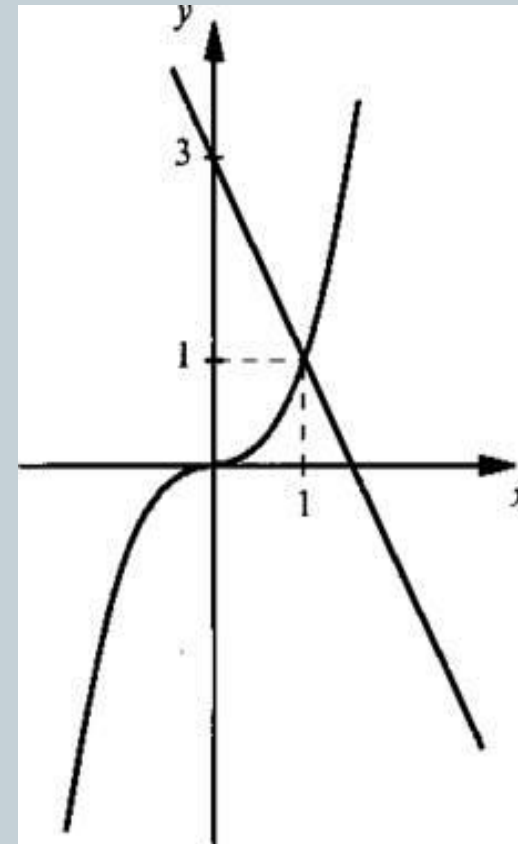


При решении уравнения воспользуемся свойством монотонности функции:  
*если функция  $y = f(x)$  убывает, а функция  $y = g(x)$  возрастает и если уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет корень, то только один.*

$$x^5 + 2x - 3 = 0,$$
$$x^5 = -2x + 3.$$

$y = x^5$  - возрастающая, а  
 $y = -2x + 3$  - убывающая,  
то корень у заданного уравнения один, и этим корнем является значение  $x = 1$ . Это хорошо видно из приведенного рисунка.

Ответ:  $x = 1$ .



# Решим уравнение $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40$



## Решение:

Уравнение вида  $(x+a)(x+b)(x+c)(x+k)=p$  сводится к квадратному, если  $a+c=b+k$  или  $a+b=c+k$  и т. д.

$1+5=2+4$ , мы видим симметрию левой части.

$$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)=40,$$

$$x^2+6x+5=t,$$

$$t(t+3)=40, \quad t^2+3t-40=0$$

$$t=-8 \text{ или } t=5.$$

Получаем  $x^2+6x+5=5$ , где  $x=0$ ,  $x=-6$

$x^2+6x+5=-8$ , не имеет корней

Ответ:  $-6, 0$ .

Дополнительное задание:  $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)=-96$ ,  
 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=-297$ ,  
 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-15=0$

# Решим уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$



## Решение:

$2 \cdot 12 = 3 \cdot 8$ , мы видим симметрию левой части

Произведение 1 и 4, 2 и 3 множителей заменим квадратными трехчленами

$$(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2.$$

Обе части уравнения разделим на  $x^2 \neq 0$  и получим уравнение

$$(x + 24/x + 14)(x + 24/x + 11) = 4.$$

Пусть  $x + 24/x = y$ , тогда  $(y + 14)(y + 11) = 4$ ,

Получим квадратное уравнение  $y^2 + 25y + 150 = 0$ ,  $y_1 = -10$  и  $y_2 = -15$ .

$$x + 24/x = -10$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$x_1 = -4, x_2 = -6$$

$$x + 24/x = -15$$

$$x^2 + 15x + 24 = 0$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$$

Дополнительное задание:  $(x+4)(x-2)(x+5)(x-10) + 54x^2 = 0$

# Решим уравнение $(x+6)^4+(x+4)^4=82$ .



## Решение :

Уравнение вида  $(x + a)^4+(x + b)^4=c$ , решается заменой  $x = t -(a+b):2$ .

Введем замену  $x = t -(6+4):2=t-5$ . Тогда уравнение имеет следующий вид:

$$(t-5+6)^4+(t-5+4)^4=82,$$

$$((t^2+1)^2+((t-1)^2)^2=82,$$

$$(t^2+2t+1)^2+(t^2-2t+1)^2=82,$$

$$2t^4+12t^2-80=0,$$

$$t^4+6t^2-40=0, \text{ пусть } t^2=m, m \geq 0,$$

$$m^2+6m-40=0,$$

$m_1=4, m_2=-10$  - не удовлетворяет условию,

$$t^2=4, t=+2,-2,$$

$$x_1=-3, x_2=-7.$$

Ответ: -3, -7.

Дополнительное задание:  $(x+2)^4+x^4=82$ .

Решим уравнение  $x^3 - 2x - (x^2 + 2)a - 2a^2x = 0$ .



## Решение:

Отметим, что в это уравнение *переменная x* входит в *третьей степени* (и ниже), *переменная a* - во *второй степени* (и ниже). Поэтому удобно рассматривать такое уравнение как квадратное *по переменной a*.

Запишем его в виде  $2xa^2 + (x^2 + 2)a - (x^3 - 2x) = 0$ .

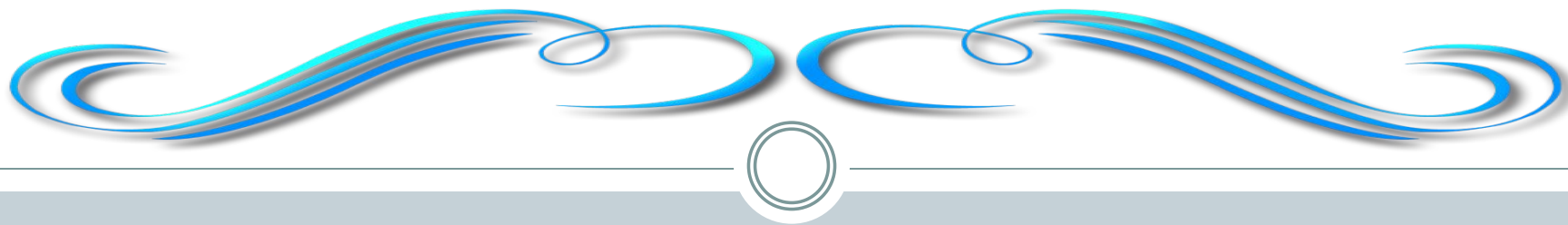
Найдем  $D = (x^2 + 2)^2 + 8x(x^3 - 2x) = (3x^2 - 2)^2$  и корни и  $a = \frac{x^2 - 2}{2x}$ ,  $a = -x$ .

Вернемся к старой неизвестной  $x$ .

Уравнение  $a = \frac{x^2 - 2}{2x}$ , или  $x^2 - 2ax - 2 = 0$ , имеет корни  $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 2}$ .

Уравнение  $a = -x$  имеет корень  $x_3 = -a$ .

Ответ:  $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 2}$ ,  $x_3 = -a$ .



**«Мне приходится делить свое время между  
политикой и уравнениями.**

**Однако уравнение, по-моему, гораздо важнее,  
потому что  
политика существует только для данного момента,  
а уравнение будет существовать вечно».**

**ЭНШТЕЙН А.**