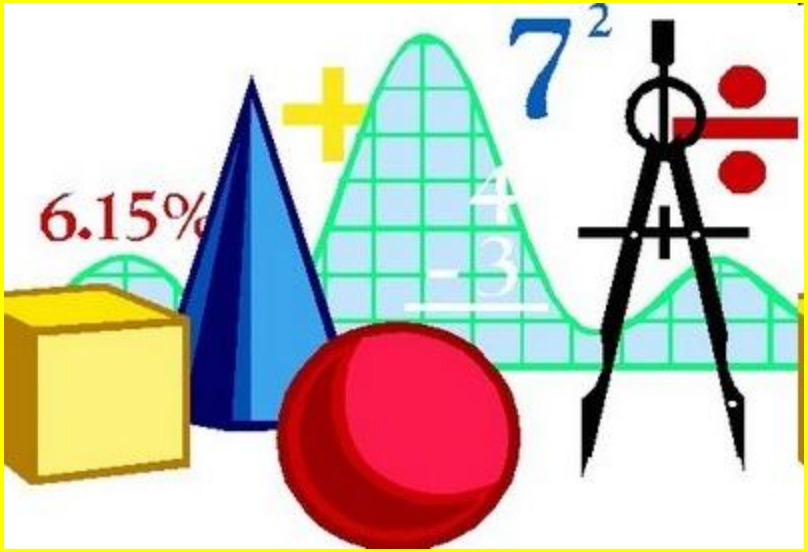


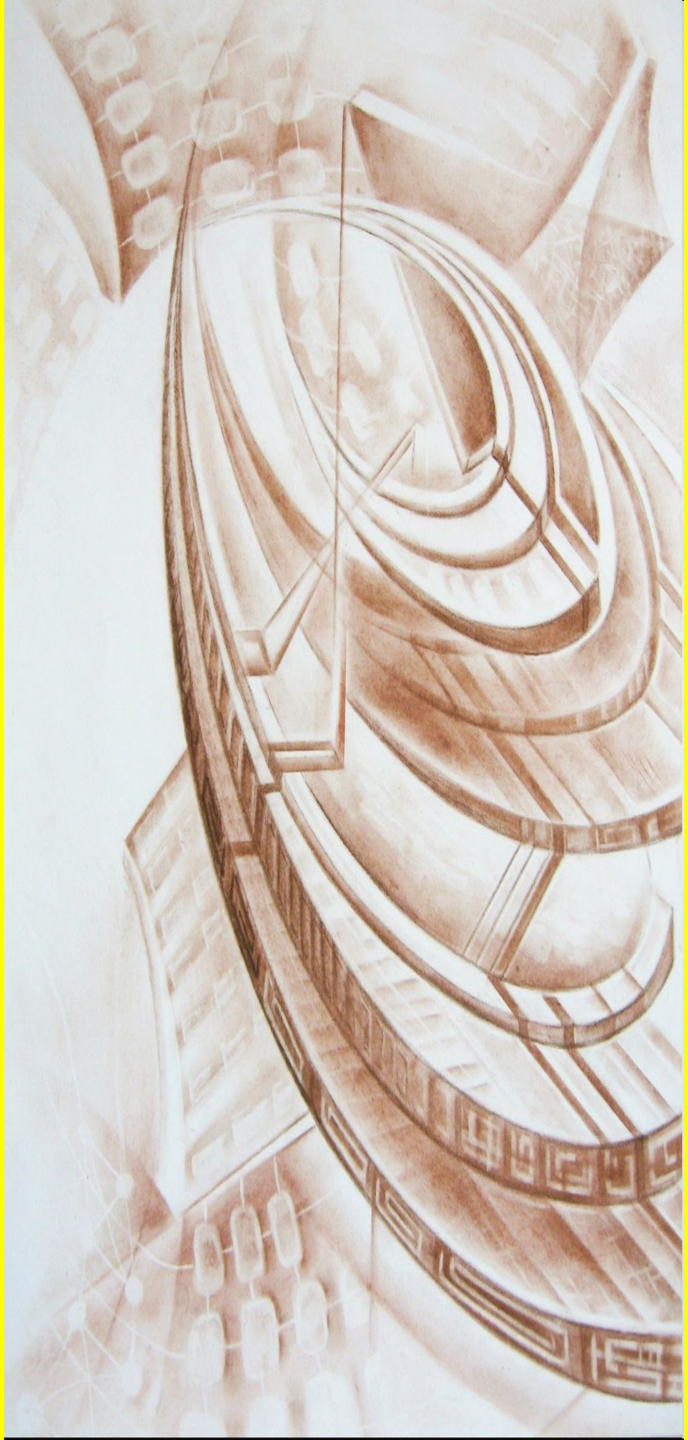
Арифметическая прогрессия

Учитель: Скарлат Т. В.

Определение.

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

$a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$



Число d называют разностью арифметической прогрессии $d = a_{n+1} - a_n$

Если разность между последующим и предыдущим членами последовательности есть одно и то же число, то это арифметическая прогрессия. Разумеется, при этом предполагается, что обнаруженная закономерность справедлива не только для явно выписанных членов последовательности, но и для всей последовательности в целом.

Арифметическая прогрессия считается конечной, если рассматриваются только ее первые несколько членов.

Арифметическая прогрессия является:
возрастающей последовательностью, если $d > 0$, например, 1, 3, 5, 7, 9,11,...
убывающей, если $d < 0$, например, 20,17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, ...

Свойство арифметической прогрессии: каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Верно и обратное утверждение: если в последовательности (an) каждый член начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

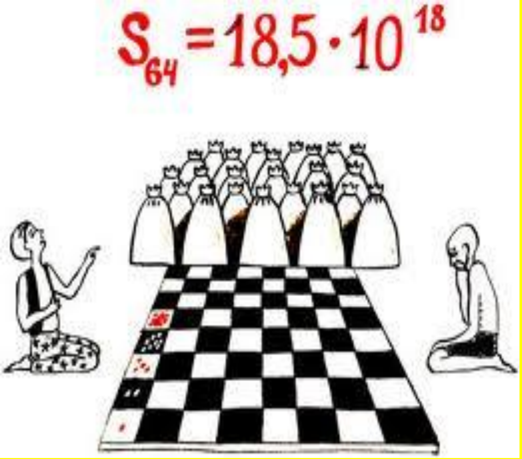
Первое представление о арифметических прогрессиях были ещё у древних народов.

В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания, как их решать.

В древнеегипетском папирусе Ахмеса

(ок.2000г. до н.э.) приводится такая задача: «Пусть тебе сказано: раздели десять мер ячменя между 10 людьми так, чтобы разность мер ячменя, полученного каждым человеком и его соседом, равнялось одна восьмая меры». В этой задачи речь идёт об арифметической прогрессии. Условие задачи, пользуясь современными обозначениями, можно записать так: $S_{10} = 10$,

$d = 1/8$, найти a_1, a_2, a_3.



О прогрессиях и их суммах знали древнегреческие учёные. Так, им были известны формулы суммы n чисел последовательности натуральных, чётных и нечётных чисел. Отдельные факты об арифметической прогрессии знали китайские и индийские учёные. Об этом говорит, например известная индийская легенда об изобретателе шахмат.

Термин «прогрессия» (от латинского progressio, что означает «движение вперёд») был введён римским автором Боэцием (VI век) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия «арифметическая» и «геометрическая» были перенесены на прогрессии из теории непрерывных пропорций, изучением которых занимались древние греки.

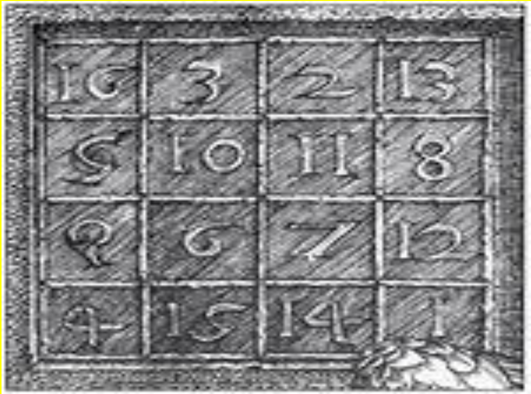
Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана в книге Евклида « Начала» (IIIв. до н.э.).

Правило отыскания суммы членов арифметической прогрессии встречается в « Книге абака»

Л. Фибоначчи (1202).

С арифметической прогрессией связан интересный эпизод из жизни немецкого математика К.Ф. Гаусса (1777 – 1855). Когда ему было 9 лет, учитель занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу: « Сосчитать сумму всех натуральных чисел от 1 до 40 включительно: 1+2+3+4+5+…+40». Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: « Я уже решил». Большинство учеников после долгих подсчётов получили неверный результат. В тетради Гаусса было одно число, но зато верное.

Арифметические прогрессии и их свойства изучались математиками с древних времён. Греческих математиков интересовала связь прогрессий с так называемыми многоугольными числами, вычислением площадей, объемов. Большой популярностью даже в наши дни пользуются магические квадраты. Эти квадраты, в каждую клетку которых вписаны числа так, что суммы чисел вдоль любой горизонтали, любой вертикали и любой диагонали равны. Такой магический квадрат изображён в гравюре немецкого художника А. Дюрера «Меланхолия».



Спасибо за внимание