Домашнее задание

1) $tg\ x = -5$
2) $tg\ 3x = 0$
3) $1 + ctg\ x = 0$
4) $(tg\ x - 2)(2\cos x - 1) = 0$

Домашнее задание

1) tg x= -5 x = -arctg5+πk,
2) tg 3x=0 x= πk/3
3) 1+ ctg x=0 x =-π/4+πk
4) (tg x -2)(2 cos x -1)=0

tg x -2=0, x= arctg2+πk

2 cos x -1=0, x=±π/3+ πk

Тригонометрические уравнения и методы их решений

Тригонометрические уравнения – уравнения, содержащие неизвестное под знаком тригонометрической функции.

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов:

- *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида
- *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения.

Рассмотрим десять основных методов решения тригонометрических уравнений.

Содержание:

Алгебраический метод

Этот метод нам хорошо известен из курса алгебры как метод замены переменной и подстановки.

Пример. Решить уравнение:

$$2\cos^2x-\sin x+1=0$$

Решение. $2(1-\sin^2x)-\sin x+1=0$

$$-2\sin^2x-\sin x+3=0$$

$$2\sin^2x+\sin x-3=0$$

Пусть $\sin x=y$, $-1\leq y\leq 1$

$$2y^2+y-3=0$$

$y_1=-1,5$- не подходит по условию

$y_2=1$

Возвращаемся к старой переменной:

$\sin x=1$

$x=\Pi/2+2\Pi k,\ k \in Z$

Метод разложения на множители

Пример. Решить уравнение:

$$\sin x - \sin 2x = 0$$

Решение. $\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$

$$\sin x(1 - \cos x) = 0$$

1. $\sin x = 0$ $\qquad x = \Pi k,\ k \in Z$
2. $1 - \cos x = 0$

   $\cos x = 1$ $\qquad x = 2\Pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \Pi k,\ k \in Z$

Метод вспомогательного угла

Пример. Решить уравнение:

$$3\sin x-4\cos x=5$$

Решение. $3^2+4^2=25$

$$\sqrt{25}=5$$

$$5(3\sin x/5-4\cos x/5)=5$$

$$3\sin x/5-4\cos x/5=1$$

Т.к. $(3/5)^2+(4/5)^2=1$, то

$3/5=\cos\varphi$ $\varphi=\arccos(3/5)$

$4/5=\sin\varphi$ $\varphi=\arcsin(4/5)$

$$\sin x\cdot\cos\varphi-\cos x\cdot\sin\varphi=1$$

$$\sin(x-\varphi)=1$$

$$x-\varphi=\Pi/2+2\Pi k,\ k \in Z$$

$$x=\Pi/2+\varphi+2\Pi k,\ k \in Z$$

$$x=\Pi/2+\arcsin(4/5)+2\Pi k,\ k \in Z$$

Однородные уравнения

Уравнение называется однородным относительно sin и cos, если все его члены одной и той же степени относительно sin и cos одного и того же угла.

Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

в) приравнять все множители и скобки нулю;

г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;

д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tg .

Пример. Решить уравнение:

$$3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2.$$

Решение.

$$3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

$$\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

$$tg^2 x + 4tg x + 3 = 0 ,$$

отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения:

$y_1 = -1$, $y_2 = -3$,

отсюда

1) $tg\ x = -1$, $x = -\Pi/4 + \Pi k,\ k \in Z$

2) $tg\ x = -3$, $x = -arctg 3 + \Pi n,\ n \in Z$

Универсальная подстановка

Универсальная подстановка применяется для тригонометрических уравнений, содержащих 2 и более тригонометрические функции.

Пусть $tg(x/2)=t$, тогда

$\sin x=2t/(1+t^2)$ (1)

$\cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$ (2)

$tg x=2t/(1-t^2)$

В конце решения следует обязательно сделать проверку!

Пример. Решить уравнение:

$$3\sin x-4\cos x=3$$

Решение.

При помощи формул (1) и (2) произведем замену sinx и cosx и приведем выражение к общему знаменателю:

$$(6t-4+4t^2)/(1+t^2)=3$$

Т.к. $1+t^2>0$, то

$$4t^2+6t-4=3+3t^2$$

$$t^2+6t-7=0$$

$$t_1=-7 \quad t_2=1$$

$$tg(x/2)=-7 \quad x=2arctg(-7)+2\Pi k,\ k \in Z$$

$$tg(x/2)=1 \quad x=\Pi/2+2\Pi n,\ n \in Z$$

Метод оценки

При решении некоторых тригонометрических уравнений иногда бывает полезно оценить значения тригонометрических функций, входящих в уравнение.

Пример. Решить уравнение:

$$\sin x \cdot \sin 5x = 1$$

$\sin x = -1$	$\sin x = 1$
$x = -\Pi/2 + 2\Pi n,\ n \in Z$	$x = \Pi/2 + 2\Pi m,\ m \in Z$
$\sin 5x = -1$ - ?	$\sin 5x = 1$ - ?
$\sin 5(-\Pi/2 + 2\Pi n) = -1$	$\sin 5(\Pi/2 + 2\Pi n) = 1$
$\sin(-5\Pi/2 + 5 \cdot 2\Pi n) = -1$	$\sin(5\Pi/2 + 5 \cdot 2\Pi n) = 1$
$\sin(-5\Pi/2) = -1$	$\sin(5\Pi/2) = 1$
$\sin(-\Pi/2) = -1$	$\sin(\Pi/2) = 1$ - верно
$-\sin(\Pi/2) = -1$ - верно	Ответ: $x = \Pi/2 + \Pi k,\ k \in Z$

Метод понижения степени

Для решения уравнений данным методом применяются формулы понижения степени:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

Пример. Решить уравнение:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\tfrac{1}{2}\sin^2 2x$$

Решение. $(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\tfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$$\tfrac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=\tfrac{1}{2}(1-\cos^2 2x)$$

$$\tfrac{1}{2}(2+2\cos^2 2x)=1-\cos^2 2x$$

$$1+\cos^2 2x= 1-\cos^2 2x$$

$$2\cos^2 2x=0$$

$$\cos 2x=0$$

$$2x=\Pi/2+\Pi k\ ,\ k \in Z$$

$$x= \Pi/4+\Pi k/2\ ,\ k \in Z$$

Метод сравнения множеств

Уравнения вида $f(x)=\varphi(x)$ решаются методом сравнения множеств.

- Если $E(f) \cap E(\varphi)$ – пустое множество, то уравнение не имеет решений
- Если $E(f) \cap E(\varphi)$ состоит только из одной общей точки, то уравнение решается системой 2-х уравнений, левые части которых равны f и φ, а правые части равны значению общей точки.

Пример. Решить уравнение:

$$6\cos^2 5x - 5\cos x + 5{,}1 = 0 \qquad (1)$$

Решение. $$6\cos^2 5x + 5{,}1 = 5\cos x \qquad (2)$$

Пусть $f(x)=6\cos^2 5x+5{,}1$ и $\varphi(x)=5\cos x$.

$E(f)=[5{,}1;11{,}1]$-область значений функции $f(x)$,

$E(\varphi)=[-5;5]$-область значений функции $\varphi(x)$.

Так как $E(f) \cap E(\varphi)$ является пустое множество, то равенство (2) невозможно.

Уравнение (2) решений не имеет, а, значит, и равносильное ему уравнение (1) тоже решений не имеет.

Переход к половинному углу

При решении уравнений данным методом используются формулы двойного аргумента:

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

В конце решения следует обязательно сделать проверку!

Пример. Решить уравнение:

$$2\sin x - \cos x = 2.$$

Решение.

$$4\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)-\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)=$$
$$=2\sin^2(x/2)+2\cos^2(x/2)$$

$$\sin^2(x/2)-4\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)+3\cos^2(x/2)=0$$

$$tg^2(x/2)-4tg(x/2)+3=0$$

$tg_1(x/2)=1$ $\quad x=\Pi/2+2\Pi k$, $k \in Z$

$tg_2(x/2)=3$ $\quad x=2arctg3+2\Pi k$, $k \in Z$

Преобразование произведения в сумму

Данным методом решаются уравнения вида:

1. $\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \sin\gamma x \cdot \sin\delta x$,

если $\alpha+\beta=\pm(\gamma+\delta)$ или $\alpha-\beta=\pm\gamma-\delta$

2. $\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \cos\gamma x \cdot \cos\delta x$,

если $\alpha+\beta=\pm(\gamma+\delta)$ или $\alpha-\beta=\pm\gamma-\delta$

3. $\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \cos\gamma x \cdot \cos\delta x$,

если $\alpha-\beta=\pm(\gamma+\delta)$

4. $\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \sin\gamma x \cdot \sin\delta x$,

если $\alpha+\beta=\gamma\pm\delta$ или $\alpha-\beta=\gamma\pm\delta$

Этот метод включает в себя применение формул:

- преобразования произведения в сумму:

$2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

- преобразования суммы в произведение:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin((\alpha+\beta)/2)\cdot\cos((\alpha-\beta)/2)$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos((\alpha+\beta)/2)\cdot\sin((\alpha-\beta)/2)$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos((\alpha+\beta)/2)\cdot\cos((\alpha-\beta)/2)$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin((\alpha+\beta)/2)\cdot\sin((\alpha-\beta)/2)$

Пример. Решить уравнение:

$$\sin x \cdot \sin 5x = \cos 4x$$

Решение. Преобразуем левую часть в сумму:

$$\tfrac{1}{2}\cos 4x - \tfrac{1}{2}\cos 6x = \cos 4x$$

$$\tfrac{1}{2}\cos 6x + \tfrac{1}{2}\cos 4x = 0$$

$$\cos 6x + \cos 4x = 0$$

Преобразуем левую часть в произведение:

$$2\cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$\cos 5x = 0$, $\quad x = \Pi/10 + 2\Pi k/5,\ k \in Z$

$\cos x = 0$, $\quad x = \Pi/2 + 2\Pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \Pi/10 + 2\Pi k/5,\ k \in Z$