

Домашнее задание

1) $\operatorname{tg} x = -5$

2) $\operatorname{tg} 3x = 0$

3) $1 + \operatorname{ctg} x = 0$

4) $(\operatorname{tg} x - 2)(2 \cos x - 1) = 0$

Домашнее задание

1) $\operatorname{tg} x = -5$ $x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi k,$

2) $\operatorname{tg} 3x = 0$ $x = \pi k / 3$

3) $1 + \operatorname{ctg} x = 0$ $x = -\pi / 4 + \pi k$

4) $(\operatorname{tg} x - 2)(2 \cos x - 1) = 0$

$\operatorname{tg} x - 2 = 0, x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$

$2 \cos x - 1 = 0, x = \pm \pi / 3 + \pi k$

Тригонометрические уравнения и методы их решений

Тригонометрические уравнения - уравнения, содержащие неизвестное под знаком тригонометрической функции.

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов:

- *преобразование уравнения для получения его простейшего вида*
- *решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.*

Рассмотрим десять основных методов решения тригонометрических уравнений.



Содержание:

1. Алгебраический метод
2. Метод разложения на множители
3. Метод вспомогательного угла
4. Однородные уравнения
5. Универсальная подстановка
6. Метод оценки
7. Метод понижения степени
8. Метод сравнения множеств
9. Переход к половинному углу
10. Преобразование произведения в сумму



Алгебраический метод

Этот метод нам хорошо известен из курса алгебры как метод замены переменной и подстановки.



Пример. Решить уравнение:

$$2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$$

Решение.

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sin x + 3 = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$$

Пусть $\sin x = y$, $-1 \leq y \leq 1$

$$2y^2 + y - 3 = 0$$

$y_1 = -1,5$ - не подходит по условию

$$y_2 = 1$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\sin x = 1$$

$$x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Метод разложения на множители

Пример. Решить уравнение:

$$\sin x - \sin 2x = 0$$

Решение. $\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$

$$\sin x(1 - \cos x) = 0$$

1. $\sin x = 0$ $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2. $1 - \cos x = 0$

$\cos x = 1$ $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$



Метод вспомогательного угла

Пример. Решить уравнение:

$$3\sin x - 4\cos x = 5$$

Решение.

$$3^2 + 4^2 = 25$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$5(3\sin x/5 - 4\cos x/5) = 5$$

$$3\sin x/5 - 4\cos x/5 = 1$$

Т.к. $(3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$, то

$$3/5 = \cos \varphi \quad \varphi = \arccos(3/5)$$

$$4/5 = \sin \varphi \quad \varphi = \arcsin(4/5)$$

$$\sin x \cdot \cos \varphi - \cos x \cdot \sin \varphi = 1$$

$$\sin(x - \varphi) = 1$$

$$x - \varphi = \pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 + \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 + \arcsin(4/5) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

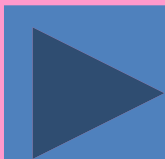


Однородные уравнения

Уравнение называется однородным относительно sin и cos, если все его члены одной и той же степени относительно sin и cos одного и того же угла.

Чтобы решить однородное уравнение, надо:

- а) перенести все его члены в левую часть;
- б) вынести все общие множители за скобки;
- в) приравнять все множители и скобки нулю;
- г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;
- д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tg .



Пример. Решить уравнение:

$$3\sin^2x + 4\sinx \cdot \cosx + 5\cos^2x = 2.$$

Решение.

$$3\sin^2x + 4\sinx \cdot \cosx + 5\cos^2x = 2\sin^2x + 2\cos^2x$$

$$\sin^2x + 4\sinx \cdot \cosx + 3\cos^2x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2x + 4\operatorname{tg}x + 3 = 0,$$

отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения:

$$y_1 = -1, \quad y_2 = -3,$$

отсюда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg} x = -3, \quad x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Универсальная подстановка

Универсальная подстановка применяется для тригонометрических уравнений, содержащих 2 и более тригонометрические функции.

Пусть $\operatorname{tg}(x/2)=t$, тогда

$$\sin x = 2t / (1+t^2) \quad (1)$$

$$\cos x = (1-t^2) / (1+t^2) \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = 2t / (1-t^2)$$

В конце решения следует обязательно сделать проверку!



Пример. Решить уравнение:

$$3\sin x - 4\cos x = 3$$

Решение.

При помощи формул (1) и (2) произведем замену $\sin x$ и $\cos x$ и приведем выражение к общему знаменателю:

$$(6t - 4 + 4t^2) / (1 + t^2) = 3$$

Т.к. $1 + t^2 > 0$, то

$$4t^2 + 6t - 4 = 3 + 3t^2$$

$$t^2 + 6t - 7 = 0$$

$$t_1 = -7 \quad t_2 = 1$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = -7 \quad x = 2\operatorname{arctg}(-7) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = 1 \quad x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Метод оценки

При решении некоторых тригонометрических уравнений иногда бывает полезно оценить значения тригонометрических функций, входящих в уравнение.



Пример. Решить уравнение:

$$\sin x \cdot \sin 5x = 1$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 5x = -1 - ?$$

$$\sin 5(-\pi/2 + 2\pi n) = -1$$

$$\sin(-5\pi/2 + 5 \cdot 2\pi n) = -1$$

$$\sin(-5\pi/2) = -1$$

$$\sin(-\pi/2) = -1$$

$$- \sin(\pi/2) = -1 - \text{верно}$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \pi/2 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 5x = 1 - ?$$

$$\sin 5(\pi/2 + 2\pi n) = 1$$

$$\sin(5\pi/2 + 5 \cdot 2\pi n) = 1$$

$$\sin(5\pi/2) = 1$$

$$\sin(\pi/2) = 1 - \text{верно}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Метод понижения степени

Для решения уравнений данным методом применяются формулы понижения степени:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$



Пример. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

Решение. $(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2x$

$$\frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x)$$

$$\frac{1}{2}(2 + 2\cos^2 2x) = 1 - \cos^2 2x$$

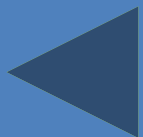
$$1 + \cos^2 2x = 1 - \cos^2 2x$$

$$2\cos^2 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \pi/2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

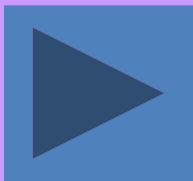
$$x = \pi/4 + \pi k/2, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Метод сравнения множеств

Уравнения вида $f(x)=\varphi(x)$ решаются методом сравнения множеств.

- Если $E(f) \cap E(\varphi)$ - пустое множество, то уравнение не имеет решений
- Если $E(f) \cap E(\varphi)$ состоит только из одной общей точки, то уравнение решается системой 2-х уравнений, левые части которых равны f и φ , а правые части равны значению общей точки.



Пример. Решить уравнение:

$$6\cos^2 5x - 5\cos x + 5,1 = 0 \quad (1)$$

Решение. $6\cos^2 5x + 5,1 = 5\cos x \quad (2)$

Пусть $f(x) = 6\cos^2 5x + 5,1$ и $\varphi(x) = 5\cos x$.

$E(f) = [5,1; 11,1]$ - область значений функции $f(x)$,

$E(\varphi) = [-5; 5]$ - область значений функции $\varphi(x)$.

Так как $E(f) \cap E(\varphi)$ является пустое множество, то равенство (2) невозможно.

Уравнение (2) решений не имеет, а, значит, и равносильное ему уравнение (1) тоже решений не имеет.



Переход к половинному углу

При решении уравнений данным методом используются формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

В конце решения следует обязательно сделать проверку!



Пример. Решить уравнение:

$$2\sin x - \cos x = 2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} 4\sin(x/2) \cdot \cos(x/2) - \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2) &= \\ &= 2\sin^2(x/2) + 2\cos^2(x/2) \end{aligned}$$

$$\sin^2(x/2) - 4\sin(x/2) \cdot \cos(x/2) + 3\cos^2(x/2) = 0$$

$$\operatorname{tg}^2(x/2) - 4\operatorname{tg}(x/2) + 3 = 0$$

$$\operatorname{tg}_1(x/2) = 1 \quad x = \pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}_2(x/2) = 3 \quad x = 2\arctg 3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Преобразование произведения в сумму

Данным методом решаются уравнения вида:

1. $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \sin \gamma x \cdot \sin \delta x$,

если $\alpha + \beta = \pm(\gamma + \delta)$ или $\alpha - \beta = \pm\gamma - \delta$

2. $\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \cos \gamma x \cdot \cos \delta x$,

если $\alpha + \beta = \pm(\gamma + \delta)$ или $\alpha - \beta = \pm\gamma - \delta$

3. $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \cos \gamma x \cdot \cos \delta x$,

если $\alpha - \beta = \pm(\gamma + \delta)$

4. $\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \sin \gamma x \cdot \sin \delta x$,

если $\alpha + \beta = \gamma \pm \delta$ или $\alpha - \beta = \gamma \pm \delta$



Этот метод включает в себя применение формул:

- преобразования произведения в сумму:

$$2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2\cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

- преобразования суммы в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$



Пример. Решить уравнение:

$$\sin x \cdot \sin 5x = \cos 4x$$

Решение. Преобразуем левую часть в сумму:

$$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x = \cos 4x$$

$$\frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 4x = 0$$

$$\cos 6x + \cos 4x = 0$$

Преобразуем левую часть в произведение:

$$2\cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 5x = 0, \quad x = \pi/10 + 2\pi k/5, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0, \quad x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi/10 + 2\pi k/5, \quad k \in \mathbb{Z}$$

