

Монотонность функции

Аликова Алина Андреевна,
учитель математики первой категории.

Методическая цель: организация деятельности, направленной на формирование знаний и умений обучающихся на уровне, определённом стандартом образования.

Образовательная цель: осознание понятий «возрастание», «убывание» функций: нахождение промежутков монотонности по графикам и формулам.

Задачи:

- научить правильно употреблять функциональную терминологию, понимать её в тексте, в речи, в формулировке задач;
- распознавать промежутки монотонности по графику функций;
- находить промежутки монотонности по формулам;
- уметь иллюстрировать их с помощью графических изображений;
- содействовать развитию навыков самоконтроля в процессе выполнения заданий.

Содержание

- Теоретическая шпаргалка
- Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

1 1 , 2(а,б)1 , 2(а,б), 2(в,г)1 , 2(а,б), 2(в,г),
2(д)1 , 2(а,б), 2(в,г), 2(д), 31 , 2(а,б), 2(в,
г), 2(д), 3, 4(а)1 , 2(а,б), 2(в,г), 2(д), 3,
4(а), 4(б)1 , 2(а,б), 2(в,г), 2(д), 3, 4(а),
4(б), 5
- Рефлексия

Теоретическая шпаргалка

- Определение возрастающей функции
- Определение убывающей функции
- Определение монотонной функции
- Свойства монотонности функций
- Определение взаимно обратных функций
- СВОЙСТВО взаимно обратных функций

Определение возрастающей функции

- Функция f называется *возрастающей* на множестве X , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции.
- Функция f называется *возрастающей* на множестве X , если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 множества X , таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение убывающей функции

- Функция f называется *убывающей* на множестве X , если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.
- Функция f называется *убывающей* на множестве X , если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 множества X , таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Определение монотонной функции

- Функция возрастающая на множестве X или убывающая на этом множестве называется *монотонной* на множестве X .

Свойства монотонности функции

Свойство 1. Монотонная функция каждое своё значение принимает лишь при одном значении аргумента.

Доказательство:

Допустим, что это утверждение неверно, то есть существует $f(x_2) = f(x_1)$, где f – монотонная (строго возрастающая или убывающая функция).

Пусть для определённости $x_1 < x_2$. Тогда из возрастания функции f следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

А если функция f убывает, то $f(x_1) > f(x_2)$.

Таким образом, равенство невозможно.

Свойства монотонности функции

Свойство 2. Если функция $y=f(x)$ монотонная на множестве X и сохраняет на этом множестве знак (то есть все её значения являются положительными или отрицательными), то функция $g(x)=1/f(x)$ имеет на множестве X противоположный характер монотонности.

Доказательство:

Пусть функция $y=f(x)$ возрастающая на множестве X . Возьмём на множестве X значения x_1 и x_2 , такие, что $x_2 > x_1$ и рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) > 0$; рассмотрим

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) \cdot f(x_1)} < 0$$

Значит $g(x_2) < g(x_1)$, то есть функция g убывает на X .

Аналогично, для убывающей функции.

Свойства монотонности функции

Свойство 3. Пусть f – монотонная функция на множестве X и $f(x) > 0$ при всех $x \in X$. Тогда:

если функция f возрастает на множестве X , то функция $y = (f(x))^2$ также возрастает на множестве X ;

если функция f убывает на множестве X , то функция $y = (f(x))^2$ также убывает на множестве X .

Доказательство:

Пусть $x_2 > x_1 > 0$, где $x_2, x_1 \in X$. Из курса алгебры известно, что из условия $a > b > 0$ следует $a^2 > b^2$.

Тогда для возрастающей функции из условия $f(x_2) > f(x_1)$ следует $(f(x_2))^2 > (f(x_1))^2$, то есть функция $(f(x))^2$ возрастает.

Аналогично, для убывающей функции.

Определение взаимно обратных функций

Функции f и g называются *взаимно обратными*, если:

- 1) область определения функции f совпадает с множеством значений функции g ;
- 2) множество значений функции f совпадает с областью определения функции g ;
- 3) $y_0 = f(x_0)$ тогда и только тогда, когда $x_0 = g(y_0)$ (для любого x_0 из области определения функции f и любого y_0 из области определения функции g).

Свойство взаимно обратных функций

Свойство 4. Монотонная функция обратима.

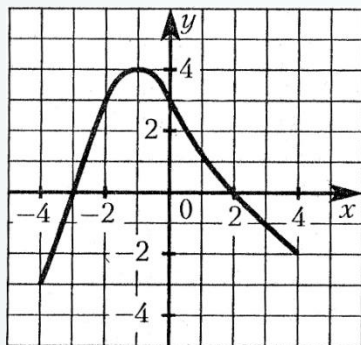
Свойство 4 следует из свойства 1, так как каждому значению функции f будет соответствовать единственное значение аргумента x . То есть можно задать функцию g , отвечающую выше приведённым условиям.

Замечание: Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$

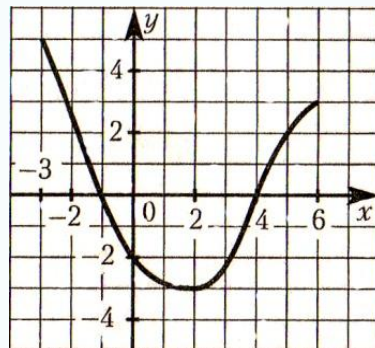
1. Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

1. По графику функции определите промежутки монотонности функции:

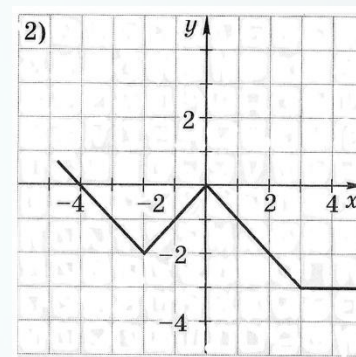
а)



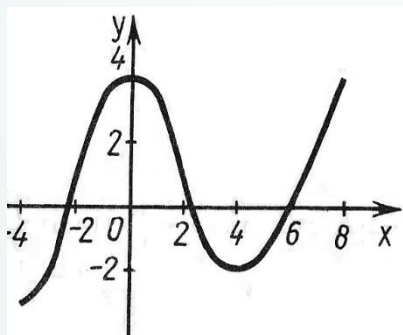
б)



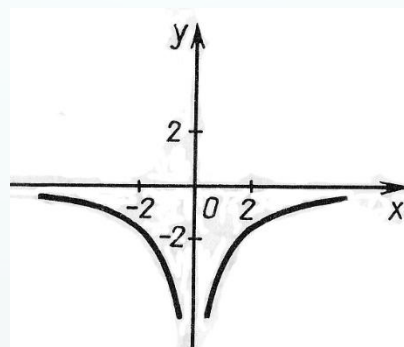
в)



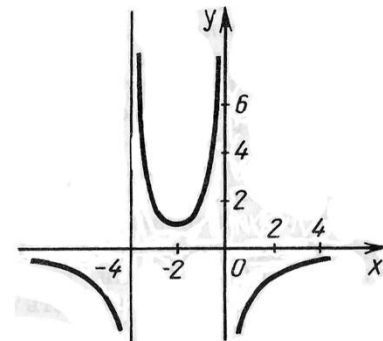
г)



д)



е)



1. а) Самопроверка

Возрастает, если

$$X \in [-4; -1];$$

убывает, если

$$x \in [-1; 4].$$

1. б) Самопроверка

Убывает, если

$$x \in [-3; 2];$$

возрастает, если

$$x \in [2; 6].$$

1. в) Самопроверка

Убывает, если

$$x \in (-\infty; -2] \cup [0; 3].$$

Возрастает, если

$$x \in [-2; 0].$$

Постоянна, если

$$x \in [3; +\infty).$$

1. г) Самопроверка

Возрастает, если

$$x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty).$$

Убывает, если

$$x \in [0; 4].$$

1. д) Самопроверка

Убывает, если

$$x \in (-\infty; 0).$$

Возрастает, если

$$x \in (0; +\infty).$$

1. е) Самопроверка

Убывает, если

$$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2].$$

Возрастает, если

$$x \in [-2; 0) \cup (0; +\infty).$$

2. Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

2. а) Функции заданы формулами:

А) $y = 10x - 2$;

Б) $y = -6x + 4$;

В) $y = -7x$;

Г) $y = 12x$

Какие из них являются возрастающими?

б) Функции заданы формулами:

А) $y = 3 - 8x$;

Б) $y = 10x + 4$;

В) $y = -0,5x$;

Г) $y = 2,5x$

Какие из них являются убывающими?

2. Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

в) Функции заданы формулами:

А) $y = \frac{6}{x}$;

Б) $y = -\frac{8}{x} + 2$;

В) $y = -\sqrt{x+1}$;

Г) $y = \sqrt{x-1}$.

Какие из них являются возрастающими?

Функции заданы формулами:

А) $y = -\frac{4}{x} - 2$;

Б) $y = \frac{2}{x+2}$;

В) $y = -\sqrt{x} + 4$;

Г) $y = \sqrt{x-1} - 1$.

Какие из них являются убывающими?

2. Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

д) Функции заданы формулами:

$$A) y = -\frac{6}{x} + 2;$$

$$Б) y = \frac{4}{x+2} - 2;$$

$$B) y = -\sqrt{x+4};$$

$$Г) y = \sqrt{x-4} + 1.$$

Укажите промежутки монотонности функций.

2. а) б) Самопроверка

а) А и Г

б) А и В

Задание 

2. в) г) Самопроверка

в) Б и Г

г) Б и В

Задание 

2. д) Самопроверка

А) Возрастает, если

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

Б) Убывает, если

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty);$$

В) Убывает, если

$$x \in [-4; +\infty);$$

Г) Возрастает, если

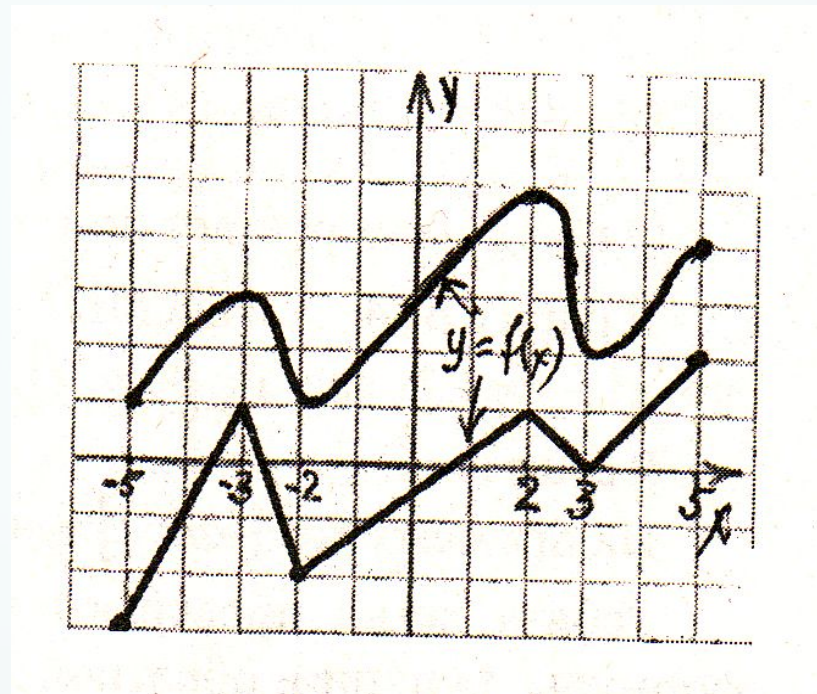
$$x \in [4; +\infty).$$

Задание 

3. Задание для самостоятельного решения с самопроверкой

3. Постройте график функции, которая бы возрастала на $[-5; -3]$, $[-2; 2]$, $[3; 5]$ и убывала на $[-3; -2]$, $[2; 3]$.

3. Самопроверка



Задание

4. Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

а) Постройте график функции $y=f(x)$, где

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x < -2, \\ 4, & \text{при } -2 \leq x \leq 2, \\ -x + 6, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Укажите промежутки монотонности функции.

4. Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

б) Постройте график функции $y=f(x)$, где

$$y = \begin{cases} x + 2, & \text{при } x \leq -1, \\ x^2, & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 4, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Укажите промежутки монотонности функции.

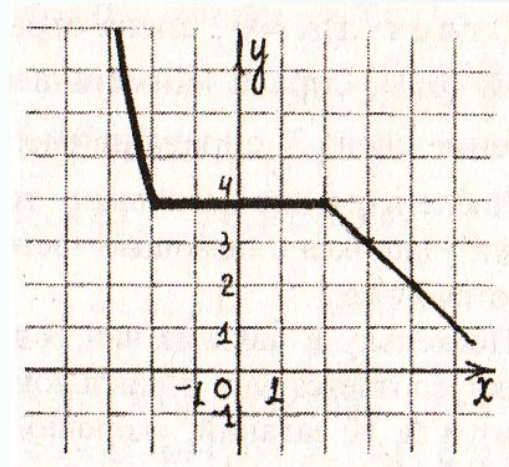
4. а) Самопроверка

Убывает, если

$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Постоянна, если

$x \in [-2; 2]$.



4. б) Самопроверка

Убывает, если

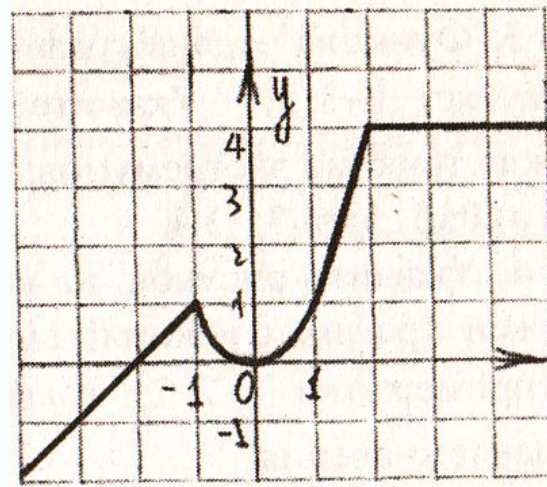
$$x \in [-1; 0].$$

Возрастает, если

$$x \in (-\infty; -1] \cup [0; 2].$$

Постоянна, если

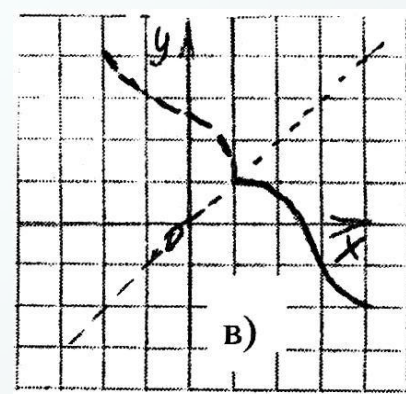
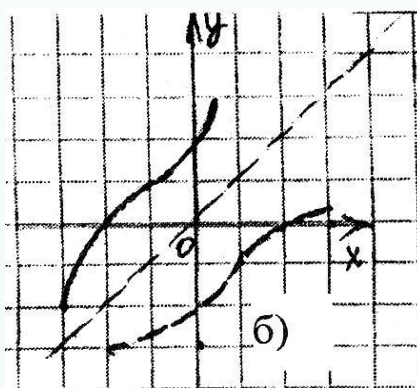
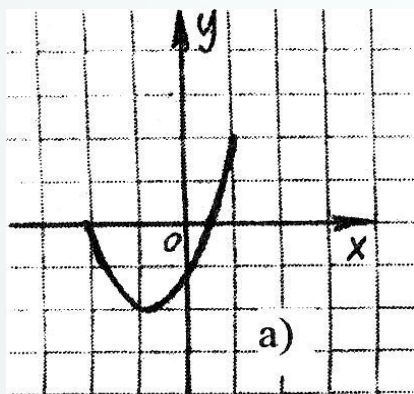
$$x \in [2; +\infty).$$



Задание

5. Задания для самостоятельного решения с самопроверкой

Укажите, какие из функций, заданных графически на рисунке, обратимы, какие необратимы.



5. Самопроверка

а) Необратима;

б) обратима;

в) обратима.

Задание 

**Спасибо за
внимание!**