Однородные тригонометрические уравнения.

Познакомимся с тригонометрическими уравнениями специального вида, довольно часто встречающиеся на практике.

Определение

- Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **первой степени.**
- Уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **второй степени.**

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента a и b отличны от нуля, так как, если **a = 0**, то уравнение принимает вид **b*cosx=0***, а получившееся уравнение **cosx=0** отдельного обсуждения не заслуживает; аналогично при **b=0** получаем ***sinx=0***, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение **$a\sin x+b\cos x=0$, *где* $a\neq 0$, $b\neq 0$.**

Разделив обе части уравнения почленно на *cosx*, получим:

$$a\sin x/\cos x + b\cos x/\cos x = 0/\cos x$$

$$a\,\mathrm{tg}\,x+b=0$$

В итоге приходим к простейшему тригонометрическому уравнению:

$$\mathrm{tg}\,x= -b/a$$

Но внимание! Вообще-то, делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение нигде не обращается в нуль, потому что на нуль делить нельзя. Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае $\cos x$ отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что $\cos x=0$. Тогда однородное уравнение $a\sin x+b\cos x=0$ примет вид $a\sin x=0$, то есть $\sin x=0$ (коэффициент a не равен нулю по условию). Получается, что и $\cos x=0$ и $\sin x=0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в различных точках.

Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на $\cos x$ – вполне благополучная операция.

Уравнение вида ***asinmx+bcosmx=0*** тоже называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

Для их решения обе части уравнения делят почленно на ***cosmx***.

Примеры

- №1. ***Решить уравнение***

2sinx-3cosx=0.

Решение.

Разделив обе части уравнения почленно на ***cosx***, получим:

2tgx-3=0;

№2. *Решить уравнение*

$\sin(2\pi - 2x) = \cos(2x - \pi/2)$.

Решение.

Разделив обе части уравнения почленно на $\cos 2x$, получим:

$$\operatorname{tg} 2x - 1 = 0;$$

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени $asin^2x+bsinxcosx+ccos^2x=0$.

Если коэффициент a отличен от нуля, то есть в уравнение содержится член sin^2x с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая, как и выше, нетрудно убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $cosx$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на cos^2x.

$$asin^2x/cos^2x+bsinxcosx/cos^2x+ccos^2x/cos^2x=0/cos^2x;$$

$$atg^2x+btgx+c=0$$

Это квадратное уравнение относительно новой переменной $t = tgx$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ коэффициент $a=0$, то есть отсутствует член $a\sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид $b\sin x\cos x=0$. Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x(\ b\ \sin x+\ c\ \cos x)=0$$

$$\cos x=0 \quad \text{или} \quad b\sin x+c\cos x=0$$

Получились два уравнения, которые мы умеем решать.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c=0$, то есть когда однородное уравнение принимает вид $a\sin^2 x+b\sin x\cos x=0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений второй степени.

Алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений второй степени.

- *Посмотреть, есть ли в уравнении* $a\sin^2x$;
- *Если* $a\sin^2x$ *содержится в уравнении , то есть* $a\neq 0$, *то уравнение решается делением обеих его частей на* $\cos^2x$ *и последующим введением новой переменной*

  $t = tgx$;
- *Если* $a\sin^2x$ *не содержится в уравнении, то есть* $a=0$, *то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят* $\cos x$;

Так же обстоит дело и в однородном тригонометрическом уравнении второй степени вида

$$a\sin^2 mx + b\sin mx\cos mx + c\cos^2 mx = 0.$$

Примеры

- №1. *Решить уравнение* $\boldsymbol{\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.}$

<u>Решение.</u>

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0\ ;\ |\div \cos^2 x$$

$$tg^2 x - 3tg x + 2 = 0.$$

- №2. *Решить уравнение* $\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0.$

<u>Решение.</u> $\cos x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0$