Презентация к

Иррациональны неравенства

Учитель Абрамова С.И
28.11 2018г

Иррациональными называются неравенства, в которых неизвестная величина стоит под знаком радикала.

Решение иррациональных неравенств сводится к решению равносильной системы или совокупности равносильных систем рациональных неравенств.

Рассмотрим **методы решения** простейших и наиболее часто встречающихся типов **иррациональных неравенств.**

1. $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Равносильной системой неравенств будет следующая:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [\, g(x) \,]^2 \end{cases}$$

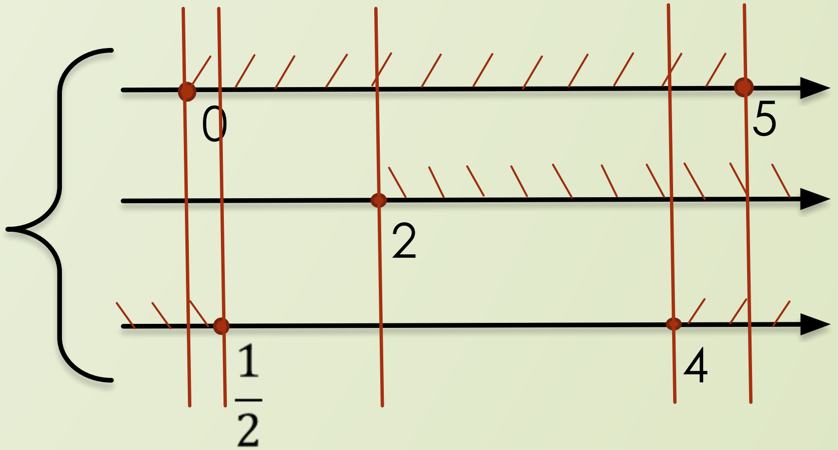
Первое и второе неравенства в системе отражают свойства арифметического корня, третье – исходное неравенство, возведенное в квадрат. Если исходное неравенство нестрогое, то и третье неравенство в равносильной системе также нестрогое.

Решить неравенство : $\sqrt{5x - x^2} < x - 2$

Решение. Равносильная система неравенств:

$$\begin{cases} 5x - x^2 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ 5x - x^2 < (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ 5x - x^2 - x^2 + 4x - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ -2x^2 + 9x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \quad x_2 = 5 \\ x = 2 \\ x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0;5] \\ x \in (2;\infty) \\ x \in (\frac{1}{2};4) \end{cases} \Rightarrow$$



Ответ: $x \in (4;5]$

2. $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Это неравенство имеет две равносильные системы:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

В самом деле, арифметический корень всегда неотрицателен, следовательно при $g(x) \leq 0$ неравенство выполняется для всех x из ОДЗ левой части неравенства. При $g(x) > 0$ обе части неравенства возводятся в квадрат.Требование неотрицательности $f(x)$ здесь излишне, поскольку эта функция уже больше заведомо неотрицательного выражения $[g(x)]^2$.Если исходное неравенство нестрогое, нестрогим будет и неравенство, получающееся возведением в квадрат исходного.

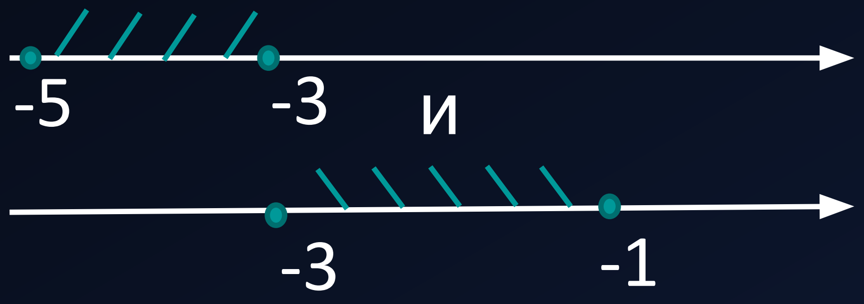
Решить неравенство: $\sqrt{x+5} \geq x+3$

Решение. Равносильные системы неравенств:

$$1)\ \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow \{ x \in [-5; -3]$$

$$2)\ \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+5 \geq (x+3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x+5-x^2-6x-9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x^2+5x+4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-3; \infty) \\ x \in [-4; -1] \end{cases} \Rightarrow \{ x \in (-3; -1]$$



Ответ: $x \in [-5; -1]$

Более сложные иррациональные неравенства, содержащие два радикала и более, алгебраическими преобразованиями, в том числе возведением в квадрат, можно привести к неравенству вида $\sqrt{f(x)} \vee g(x)$. Прежде чем приводить сложные неравенства к более простому виду, нужно обязательно найти ОДЗ исходного неравенства во избежание появления лишних решений.

Решить неравенство: $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+8}>\sqrt{7-x}+\sqrt{3x+6}$

Решение. Найдем ОДЗ исходного неравенства:

$x \in [-2;7)$

Возведем неравенство в квадрат:

$x+5+2\sqrt{(x+5)(x+8)}+x+8>7-x+2\sqrt{(7-x)(3x+6)}+3x+6$

После приведения подобных членов неравенство примет вид:

$\sqrt{(x+5)(x+8)}>\sqrt{(7-x)(3x+6)}$

Снова возведем неравенство в квадрат и получим квадратное неравенство:

$x^2+13x+40>21x+42-3x^2-6x$

$4x^2-2x-2>0$

$2x^2-x-1>0$

С учетом первоначальной ОДЗ решением исходного неравенства будут два интервала: $[-2;-\frac{1}{2})$ и $(1;7]$

Ответ: $[-2;-\frac{1}{2})\cup(1;7]$

3. $\sqrt{f(x)g(x)} \geq 0$

Один из сомножителей, а именно радикал в левой части, всегда неотрицателен. Поэтому равносильная система

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

должна быть дополнена решениями уравнения $f(x)=0$, которые удовлетворяют области определения функции $g(x)$.

Решить неравенство: $(x-5)\sqrt{x-2} \geq 0$

Решение. Равносильная система и уравнение имеют вид:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-5\geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad x-2=0$$

Откуда следует решение:

$x\geq 5$ и $x=2$

Ответ: $x \in \{2\} \cup [5; \infty)$

4. $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$ v ф(x) или $\frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}$ v ф(x)

Неравенства такого вида нужно сначала привести к дробно-национальному, точнее, к дробно-иррациональному виду, когда с одной стороны неравенства стоит нуль, а затем, используя правило знаков, записать две равносильные системы, каждая из которых содержит по одному иррациональному неравенству. Последние сводятся к какому-либо рассмотренному ранее виду.

РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО: $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$

Решение. Находим ОДЗ неравенства x<15. Переносим единицу в левую часть и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{3-x-\sqrt{15-x}}{\sqrt{15-x}} < 0$$

Знаменатель полученного дробно-иррационального неравенства всегда больше нуля, следовательно, равносильная система(с учетом ОДЗ) такова:

$$\begin{cases} 3 - x - \sqrt{15 - x} < 0 \\ x<15 \end{cases}$$

Первое неравенство приводится к виду:

$$\sqrt{15 - x} > 3\text{-}x$$

которое, в свою очередь, преобразуется в равносильные системы:

$$\begin{cases} 15-x>0 \\ 3-x\le 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3-x>0 \\ 15-x>(3-x)^2 \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x \in [3;15)$. Вторая система после преобразований примет вид:

$$\begin{cases} x^2-5x-6<0 \\ x<3 \end{cases}$$

Квадратное неравенство решается стандартным методом. Тогда $x \in (-1;3)$. В точке $x=3$ решения обоих систем «сливаются» в один интервал $(-1; 15)$

Ответ: $x \in (-1; 15)$

МАТЕРИАЛ ВЗЯТ С КНИГИ МАТЕМАТИКАО.ЮЧЕРКАСОВА» ПОЛНЫЙКУРС

ПОДГОТОВКИ К ВЫПУСКНЫМЭКЗАМЕНАМ»