Свойства функций

Автор: Сорокина Надежда Николаевна, учитель математики ГБОУ НКК

2019 г.

На рисунке изображён график зависимости температуры p (ºC) от времени суток t (час)

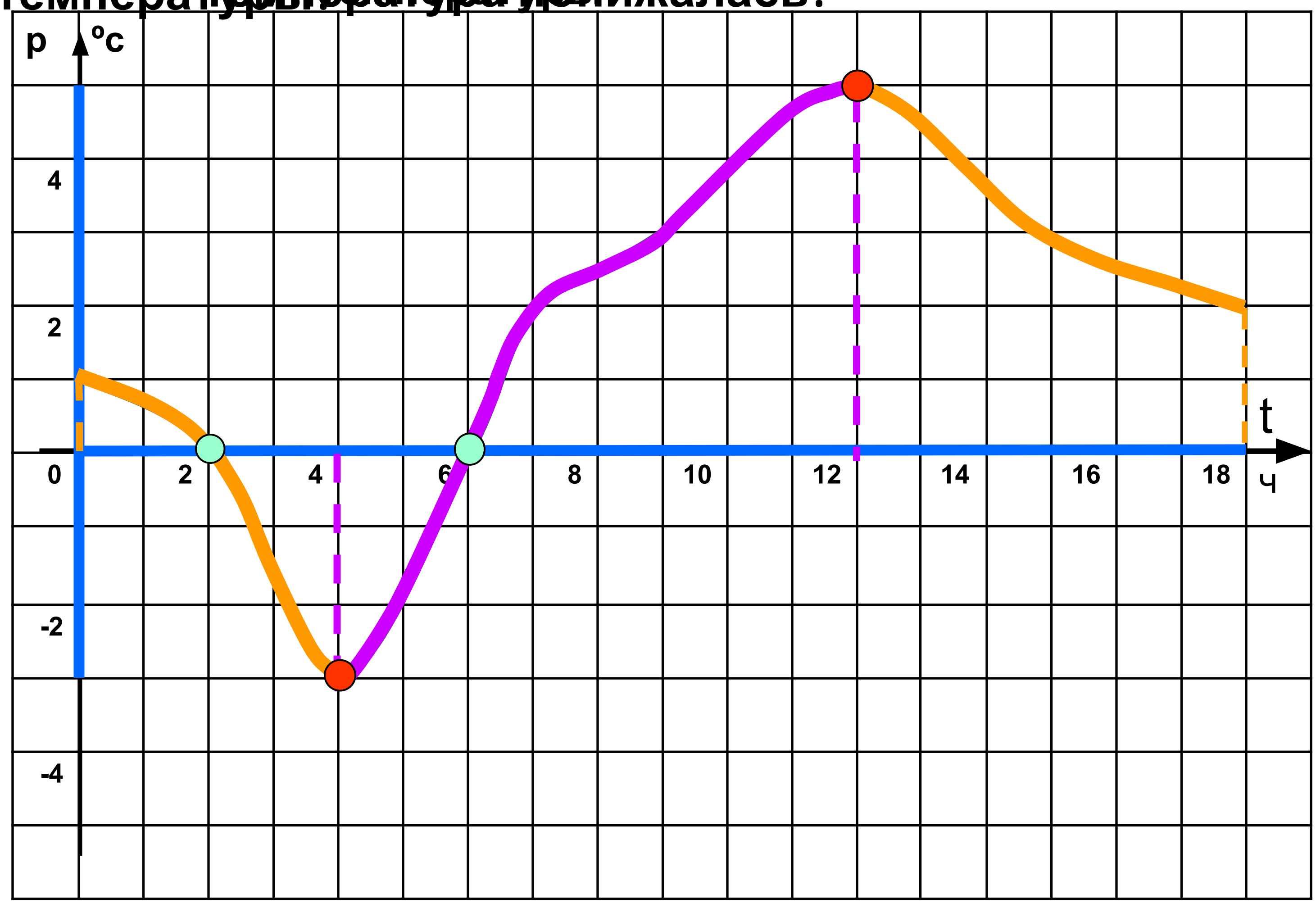
Определить:

Во сколько часов была самая низкая и самая высокая температуры?

Определите промежуток времени, в течение которого температура повышалась?

Во сколько часов температура была равна 0 градусов?

Определите промежуток времени, в течение которого температура понижалась?



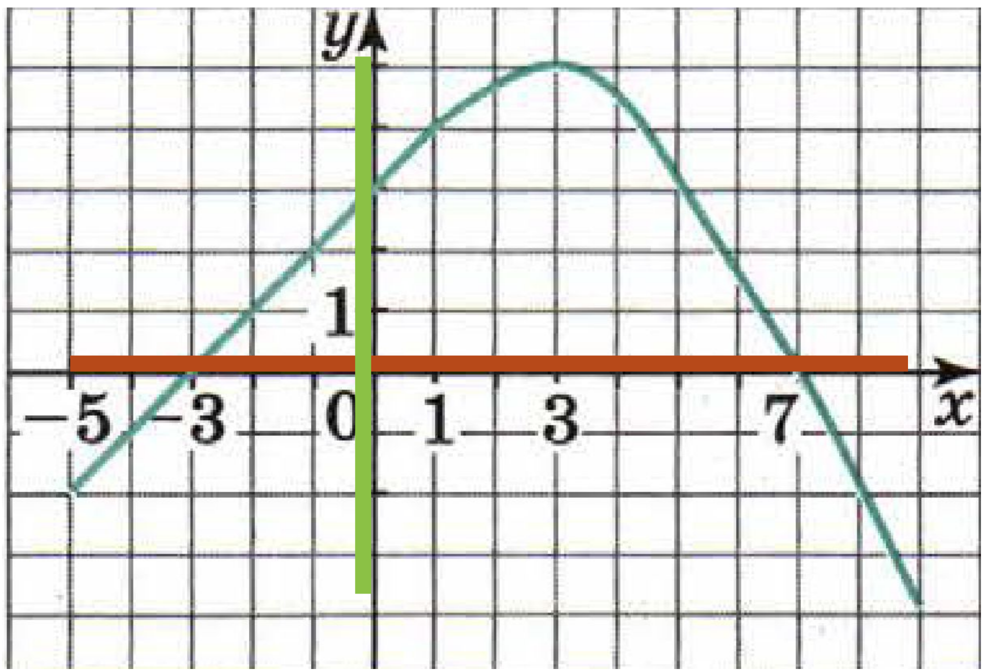
Мы выяснили некоторые свойства функции p = f(t), где t – время, p – температура

ООФ и ОЗФ

Рассмотрим функцию y=f(x), график которой изображён на рисунке.

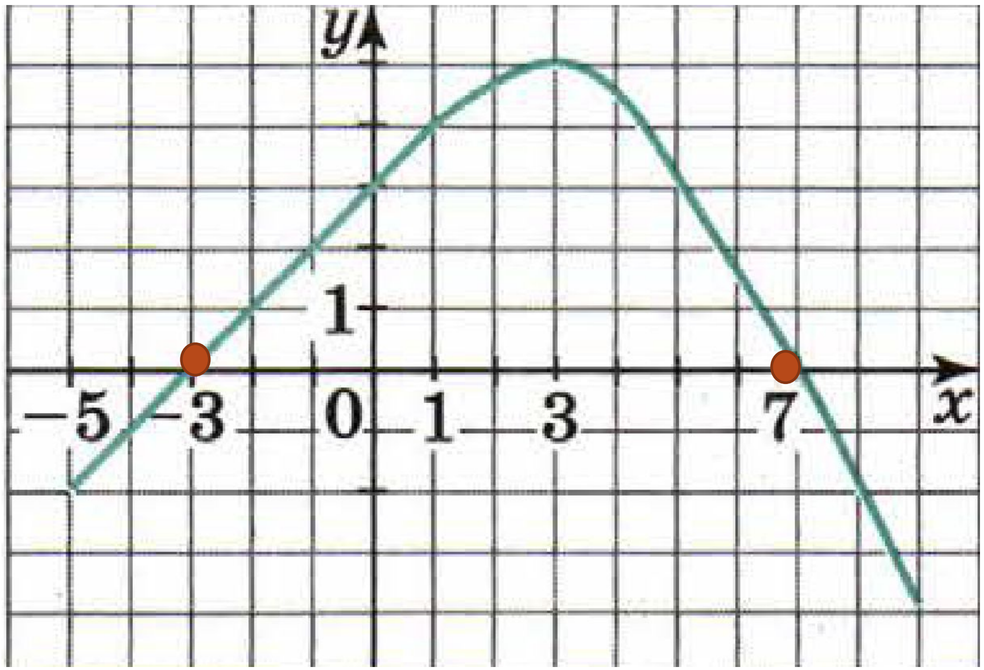
ООФ: $x \in [-5; 9]$

ОЗФ: $y \in [-4; 5]$



Нули функции

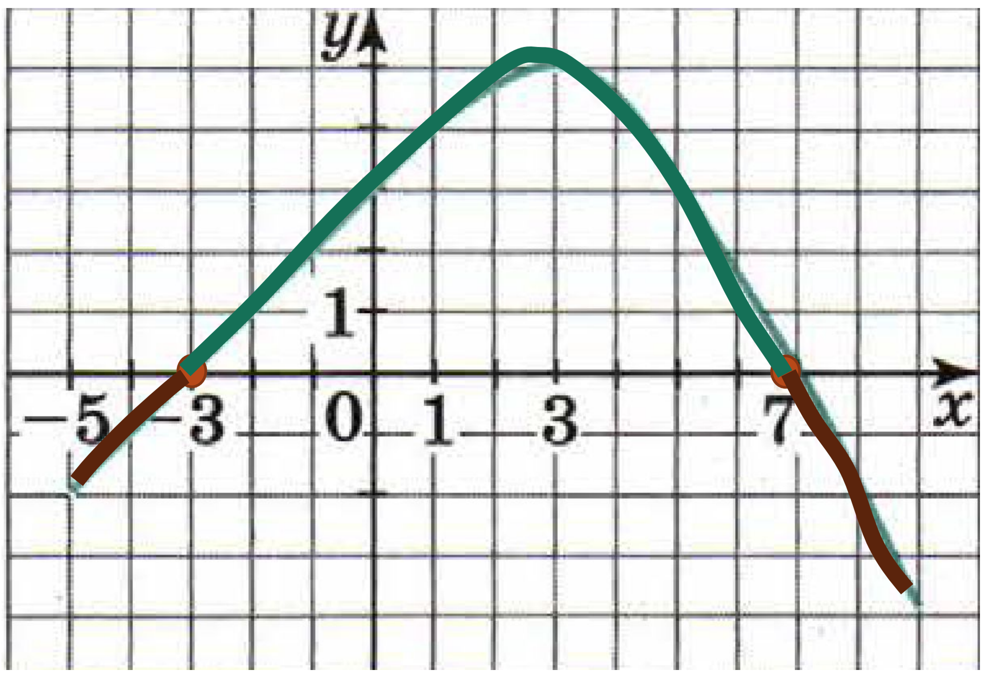
Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называются нулями функции.



y=0 при x=-3, x=7

Промежутки знакопостоянства

Промежутки в которых функция сохраняет знак, называются промежутками знакопостоянства.



y>0 при -3<x<7

y<0 при -5≤x<-3,

Промежутки монотонности

Промежутки монотонности – это промежутки возрастания и убывания

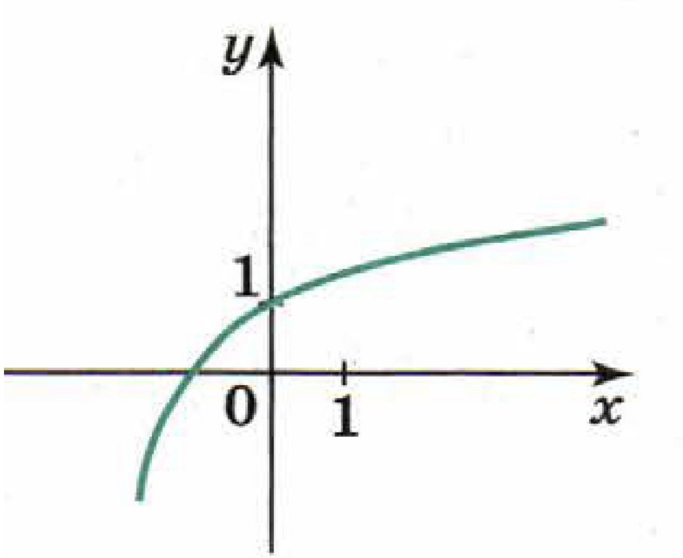
Определение. Функция называется возрастающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции; функция называется убывающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в некотором промежутке, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

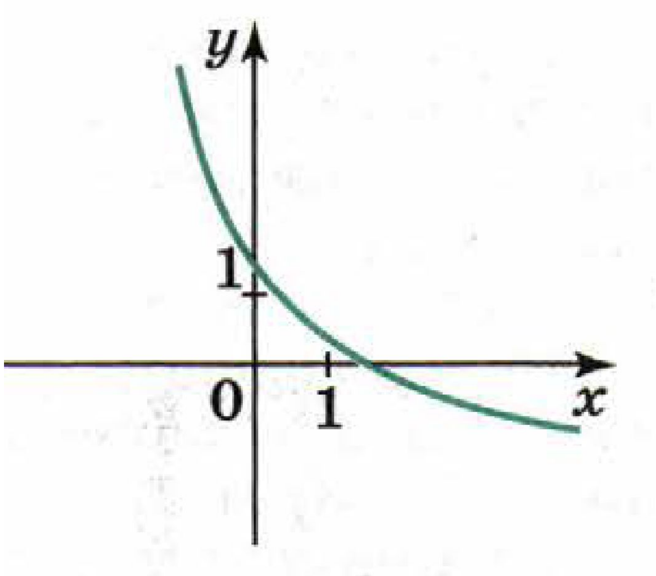
Функция $y = f(x)$ называется убывающей в некотором промежутке, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Если функция возрастает на всей области определения, то её называют возрастающей функцией, а если убывает на всей области определения – убывающей функцией.

Если функция возрастает на всей области определения,
то её называют **возрастающей функцией**,
а если убывает на всей области определения – **убывающей функцией**.



Возрастающая функция

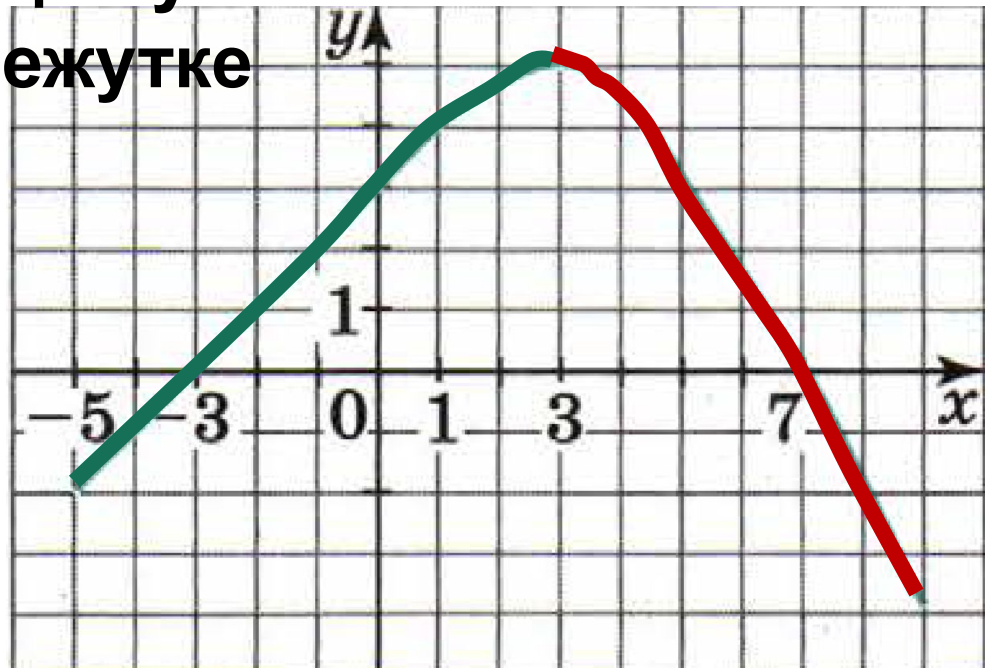


Убывающая функция

Промежутки монотонности

Функция возрастает в промежутке **[-5; 3].**

Функция убывает в промежутке **[3; 9].**



Свойства монотонных функций

Возрастающие и убывающие функции обладают определенными алгебраическими свойствами, которые могут оказаться полезными при исследовании функций.

1. Если функции **f** и **g** возрастают (убывают) на интервале **(a,b),** то сумма функций **f+g** также возрастает (убывает) на этом интервале.
2. Если функция **f** возрастает (убывает) на интервале **(a,b),** то противоположная функция −**f** убывает (возрастает) на этом интервале.
3. Если функция **f** возрастает (убывает) на интервале **(a,b),** то обратная функция **1/f** убывает (возрастает) на этом интервале.
4. Если функции **f** и **g** возрастают (убывают) на интервале **(a,b)** и, кроме того, **f≥0, g≥0,** то произведение функций **fg** также возрастает (убывает) на этом интервале.
5. Если функция **g** возрастает (убывает) на интервале **(a,b),** а функция **f** возрастает (убывает) на интервале **(c,d),** где **g:(a,b)→(c,d),** то композиция функций **f∘g** (т.е. сложная функция **y=f(g(x))**также возрастает (убывает) на интервале **(a,b).**

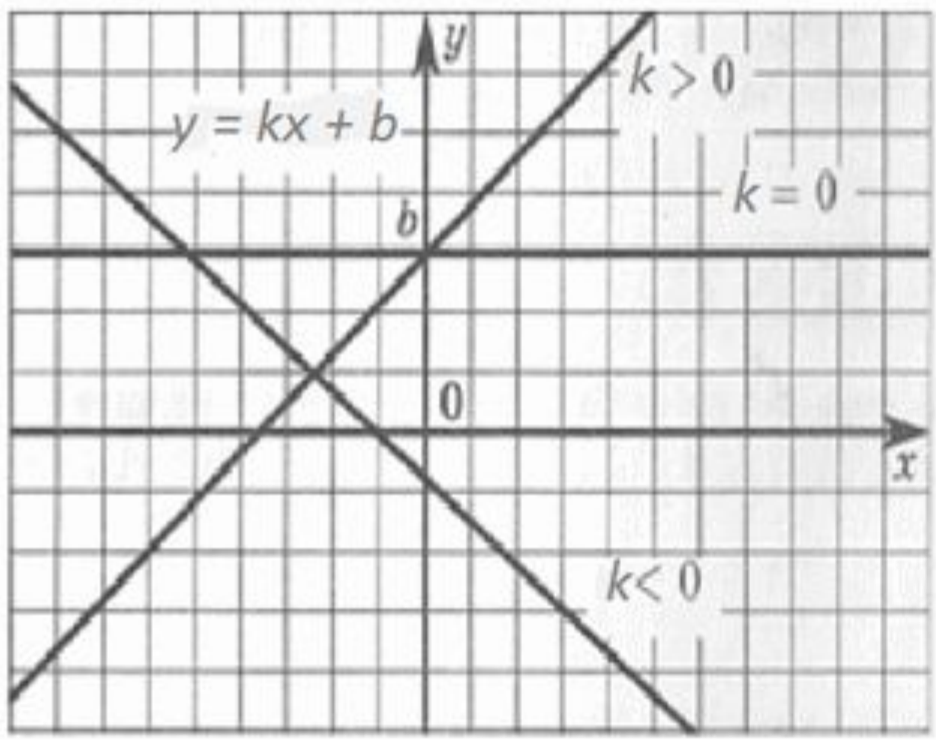
Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида

$$y = kx + b$$

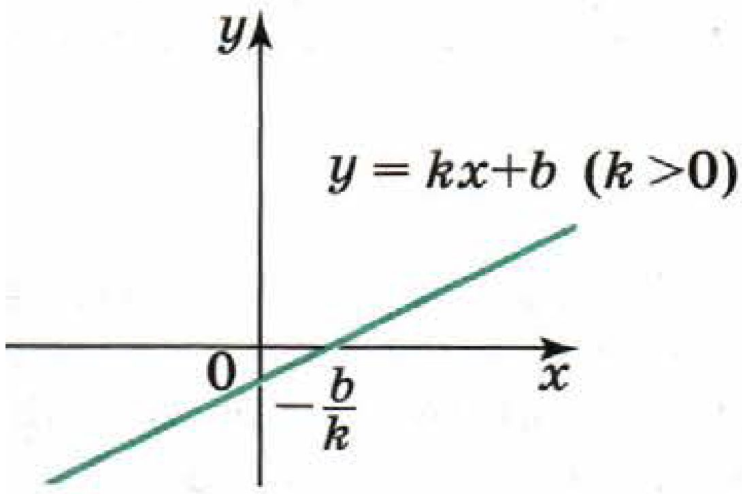
где k и b – заданные числа

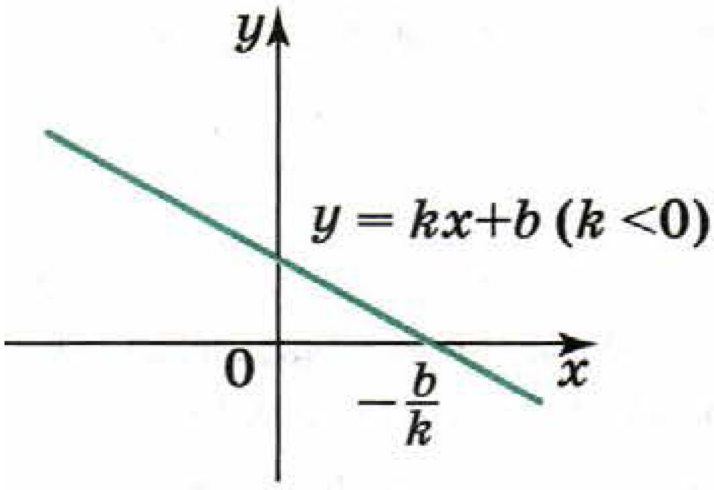
Графиком линейной функции является прямая



Линейная функция обращается в нуль при

$$x = -\frac{b}{k}$$





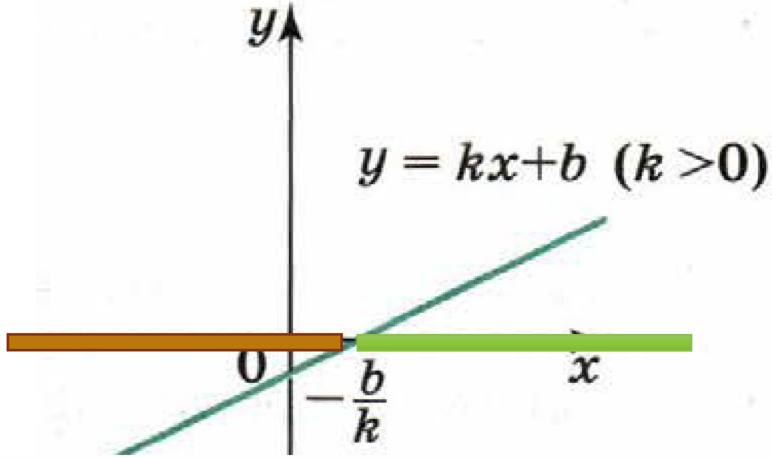
y = 0;

kx+b = 0;

kx = -b;

x = -b/k

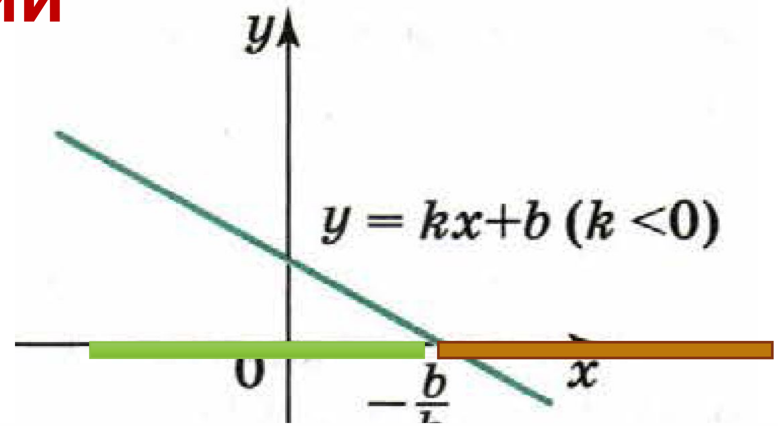
Промежутки знакопостоянства линейной функции



При $k > 0$ *функция принимает отрицательные значения в промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ *и положительные значения в промежутке* $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$.

$k>0;\ y < 0;$	$k>0;\ y >0;$
$kx+b < 0;$	$kx+b > 0;$
$kx < -b;$	$kx > -b;$
$x < -b/k$	$x > -b/k$

Промежутки знакопостоянства линейной функции

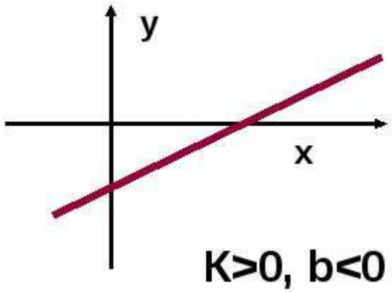


При $k<0$ *функция принимает отрицательные значения в промежутке* $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ *и положительные значения в промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$.

$k<0$; $y<0$;
$kx+b<0$;
$kx<-b$;
$x>-b/k$

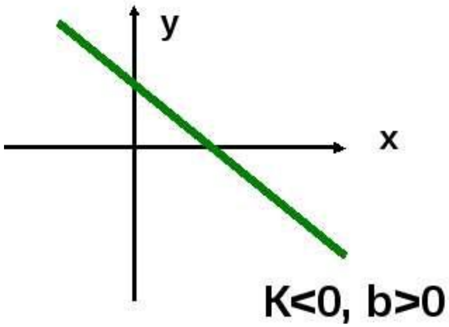
$k<0$; $y>0$;
$kx+b>0$;
$kx>-b$;
$x<-b/k$

Промежутки монотонности линейной



При к>0 функция y=kx+b является **возрастающей**

При к<0 функция y=kx+b является **убывающей**



Докажем это. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причём $x_2 > x_1$. Обозначим через y_1 и y_2 соответствующие им значения функции:

$$y_1 = kx_1 + b \text{ и } y_2 = kx_2 + b.$$

Рассмотрим разность $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Множитель $x_2 - x_1$ положителен, так как $x_2 > x_1$. Поэтому знак произведения $k(x_2 - x_1)$ определяется знаком коэффициента k.

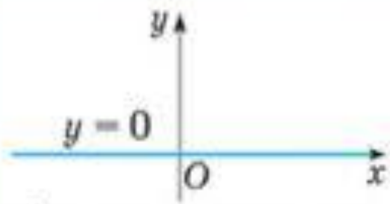
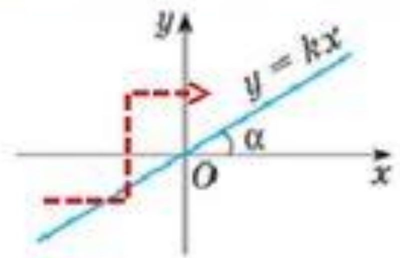
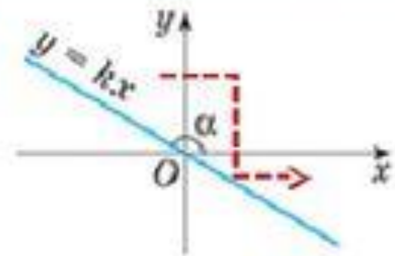
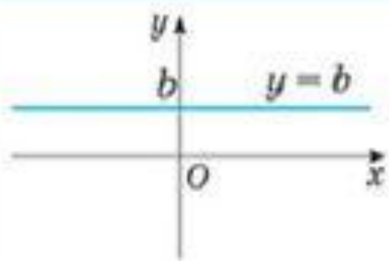
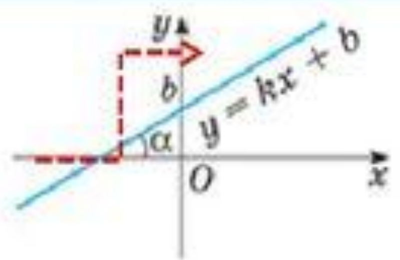
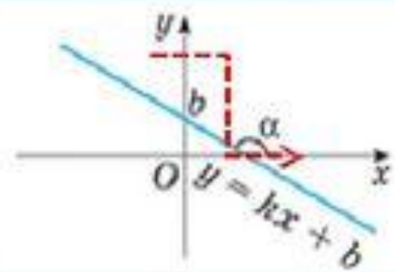
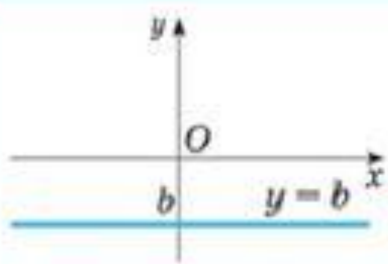
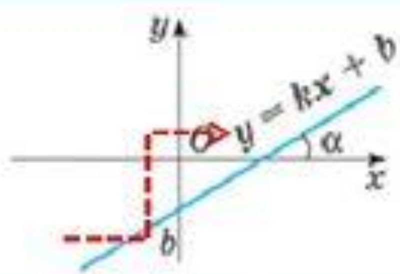
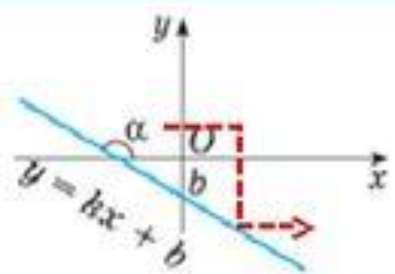
Если $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$ и $y_2 > y_1$. Значит, при $k > 0$ функция $y = kx + b$ является возрастающей.

Если $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$ и $y_2 < y_1$. Значит, при $k < 0$ функция $y = kx + b$ является убывающей.

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = kx + b$

график – **прямая**

	$k = 0$	$k > 0$	$k < 0$
$b = 0$	 график совпадает с осью Ox		
$b > 0$			
$b < 0$			

Функци я

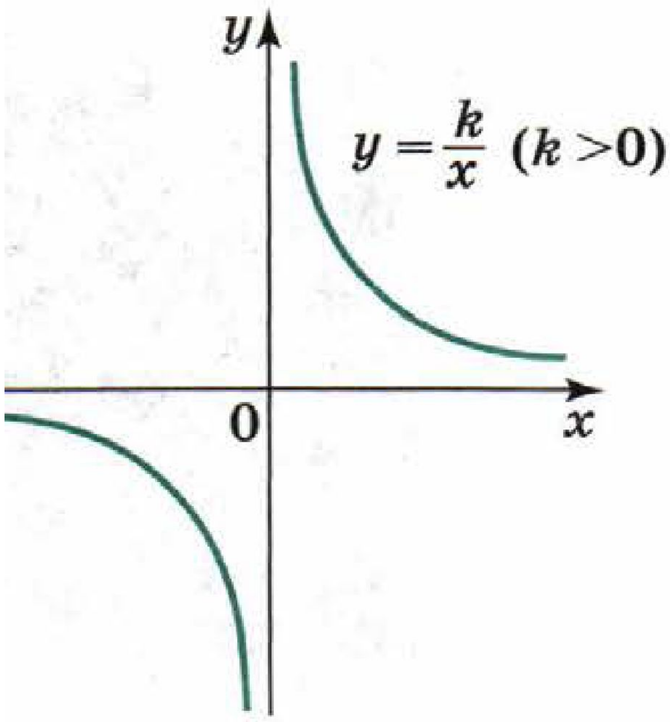
$$y = \frac{k}{x}$$

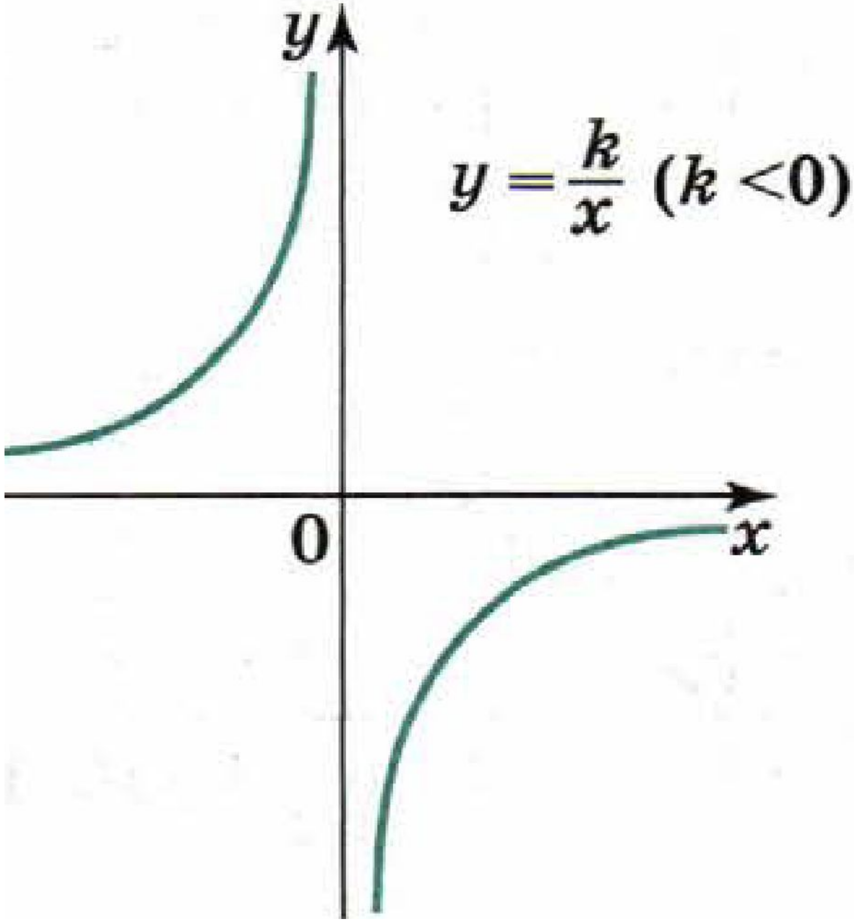
k≠ 0

ООФ: x ≠ 0

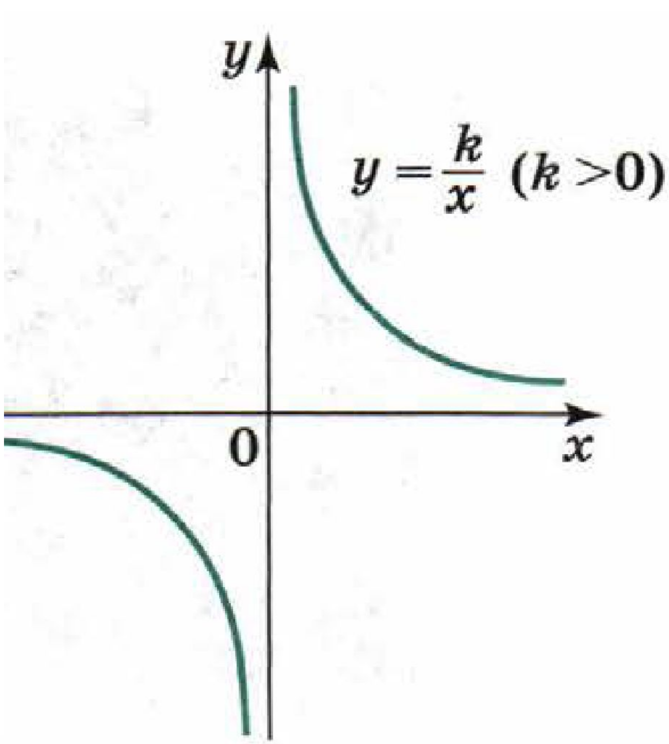
Функция $y=\frac{k}{x}$ нулей не имеет.

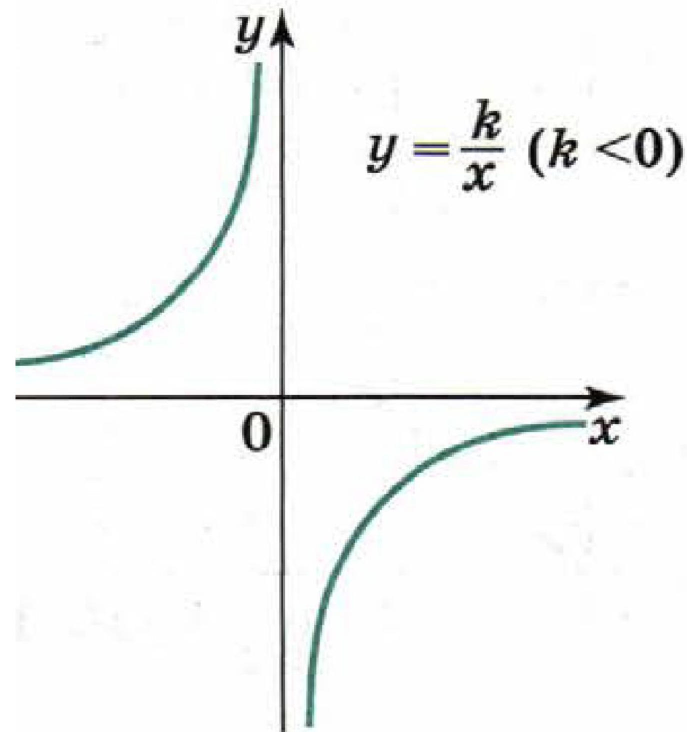
Функция $y=\frac{k}{x}$ *при* $k>0$ *принимает отрицательные значения в промежутке* $(-\infty;\ 0)$ *и положительные значения в промежутке* $(0;\ +\infty)$.





Функция $y = \frac{k}{x}$ *при* $k < 0$ *принимает отрицательные значения в промежутке* $(0; +\infty)$ *и положительные значения в промежутке* $(-\infty; 0)$.



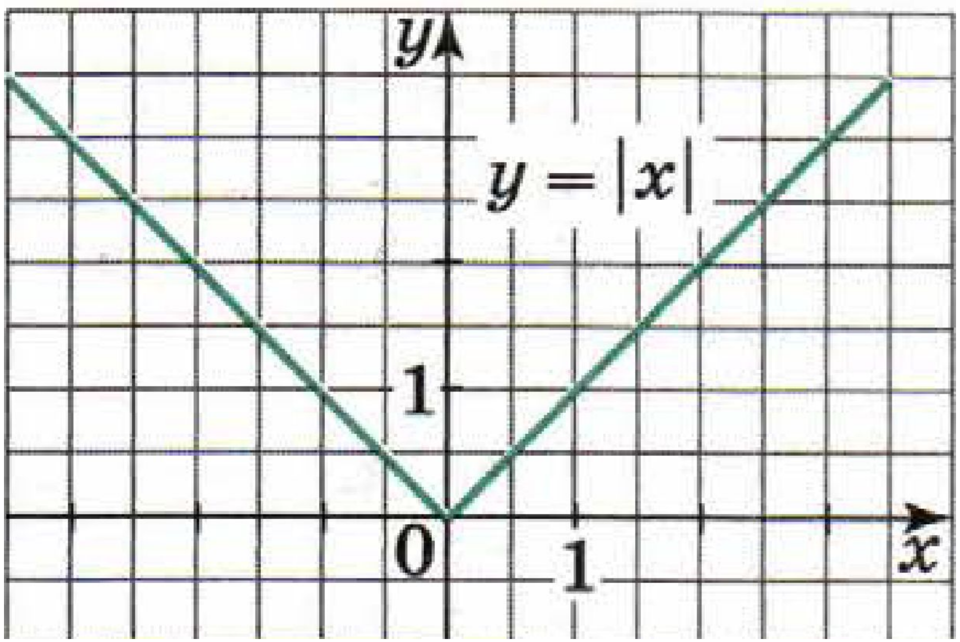


При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ является убывающей в каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ является возрастающей в каждом из этих промежутков

Заметим, что, хотя функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, убывает (или возрастает) в каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, она не является убывающей (возрастающей) функцией на всей области определения.

Функция y=|x|

$$y=|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geq 0 \\ -x, \text{ если } x<0 \end{cases}$$



Свойства:

- y=0 при x=0
- y>0 при x>0
- y<0 при x <0
- Возрастает при x≥0
- Убывает при x≤0

Самое главное

Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называются **нулями функции.**

Промежутки в которых функция сохраняет знак, называются **промежутками знакопостоянства.**

Промежутки монотонности – это промежутки возрастания и убывания функции.

Функция y = f (x) называется **возрастающей в некотором промежутке**, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция y = f (x) называется **убывающей** в некотором промежутке, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Если функция возрастает на всей области определения, то её называют **возрастающей функцией**, а если убывает на всей области определения – **убывающей функцией**.

При исследовании функции необходимо указать: ООФ, ОЗФ, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки монотонности