Квадратные уравнения

Учитель математики
ГБОУ Лицей №126 г.Санкт-Петербург
Ольшина Марина Валерьевна

Цели:

1.Систематизация знаний по теме «Квадратные уравнения»; 2.Развитие интереса к предмету.

Задачи:

1.**Знать** определение квадратного уравнения, типы, методы решения; 2. **Понимать** отличительные особенности квадратных уравнений; 3.**Применять** полученные знания при решении рациональных, иррациональных уравнений, сокращении дробей, решении задач.

Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне.

ДИОФАНТ

325 – 409 г.г. по Р. Х. знаменитый александрийский математик.

- В арифметике Диофанта отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.
- При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные.

Задача Диофанта

Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96.

Если бы искомые числа были равны:

То произведение чисел было бы равно 100

Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96.

Значит, одно из этих чисел будет больше половины их суммы, т. е. **(10 + х)**,
другое же меньше, т. е. **(10 – х)**.
Разность между ними **2х**.

Отсюда уравнение:

$$(10+x)(10-x) = 96,$$

$$100 - x^2 = 96.$$

$$x^2 - 4 = 0$$

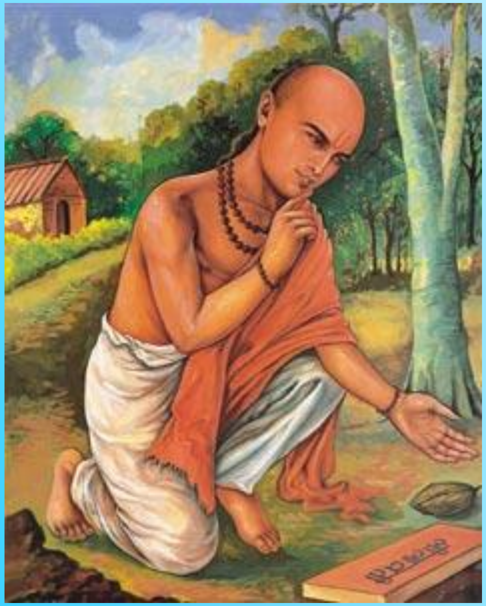
$$x = 2$$

Одно из искомых чисел равно **12**, другое **8**.

Решение **х = - 2** для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

Интересные способы решения квадратных уравнений встречаются в трудах индийского ученого Бхаскары

(600 – около 680г.г.).



И арабского ученого
Ал – Хорезми
(780 – около 850г.г.)

Задача знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары:

Обезьянок резвых стая всласть поевши, развлекалась, их в квадрате часть восьмая на поляне забавлялась, а двенадцать по лианам стали прыгать, повисая. Сколько ж было обезьянок, ты скажи мне, в этой стае?

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений.

Бхаскара пишет:

$$\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$$

$$x^2 - 64x = -768$$

и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 1024, получая затем:

$$x^2 - 64x + 1024 = -768 + 1024,$$

$$(x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16, \qquad x_2 = 48.$$

Задача Ал – Хорезми:

Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Определение квадратного уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где коэффициенты a,b,c-любые действительные числа, причем $a \neq 0.$

Определение корня

- Корнем квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

называют такое значение переменной х, при котором квадратный трехчлен

$ax^2 + bx + c$ обращается в нуль;

Типы квадратных уравнений

- полные

$b \neq 0, c \neq 0$

- неполные

а) $b = 0$

б) $c = 0$

в) $b = 0; c = 0$

Данные уравнения разбейте на полные и неполные:

а) $9x^2=0$;

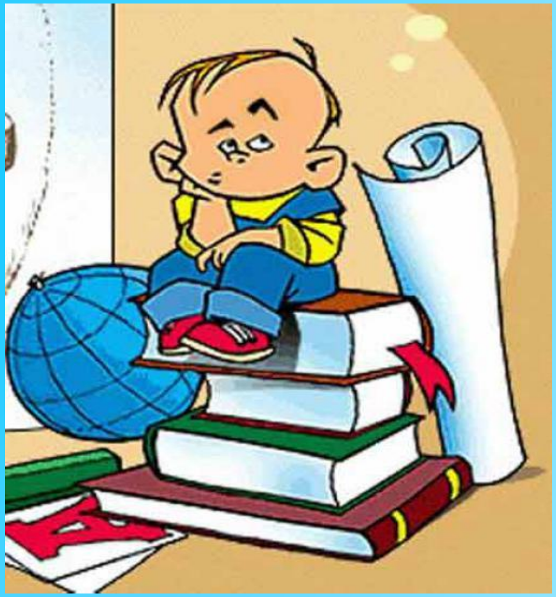
б) $3x+ x^2+1=0$;

в) $2x^2-32=0$;

г) $x^2+4x=0$;

д) $2x^2+5x-7=0$;

е) $12-x^2+3x=0$.



полные:

б) $3x+x^2+1=0$;

д) $2x^2+5x-7=0$;

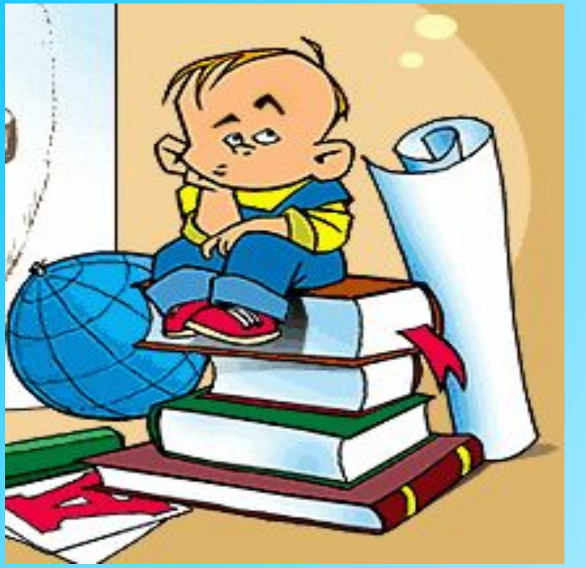
е) $12-x^2+3x=0$.

неполные:

а) $9x^2=0$;

в) $2x^2-32=0$;

г) $x^2+4x=0$.



Способы решения неполных квадратных уравнений

b=0

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$если\ -\frac{c}{a} \geq 0, то$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

c=0

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0\ или\ x = -\frac{b}{a}$$

b=0;c=0

$$ax^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Решите уравнения:

$а)x^2 = 9;$ $x_1 = -3; x_2 = 3$

$б)10x - x^2 = 0;$ $x_1 = 0; x_2 = 10$

$в)2x^2 - 8 = 0;$ $x_1 = -2; x_2 = 2$

$г)3x^2 + 27 = 0.$ *корней нет*

Формулы корней полного квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D < 0$$

Корней нет

$$D = 0$$

Один корень

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$D > 0$$

Два корня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Формула четного коэффициента

b=2k

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

a=1

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$$

Теорема Виета

x_1, x_2 - корни квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$a = 1$$

$$x_1 + x_2 = -b; \; x_1 \cdot x_2 = c$$

1.Найдите корни квадратного уравнения, не используя формулы корней:

$$а)x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$x_1 = 2; x_2 = 3$

$$б)x^2 + 3x - 4 = 0;$$

$x_1 = -4; x_2 = 1$

$$в)x^2 - 5x + 10 = 0.$$

Корней нет

2.Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа 3 и -7:

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

Применение квадратных уравнений

-решение рациональных уравнений;

-решение иррациональных уравнений;

-решение задач;

-разложение квадратного трехчлена на множители;

-сокращение дробей.

Задание:

1.Решите уравнения:

$$а)\ \frac{3}{x^2+2}=\frac{1}{x};$$

$$б)\ x^2(x^2-15)-16=0;$$

$$в)\ x-\sqrt{2-x}=0.$$

2.Сократите дробь:

$$\frac{5x^2+3x-2}{25x^2-4}$$

3.При каком значении параметра а уравнение $x^2-ax+9=0$ имеет один корень?

Проверь себя!

$$1.a)\ \frac{3}{x^2+2}=\frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x\left(x^2+2\right)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2; \end{array}\right. \\ x\neq 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: 1;2.

Проверь себя!

$$б)x^2(x^2-15)-16=0$$

$$x^4-15x^2-16=0$$

$$y=x^2$$

$$y^2-15y-16=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y=16 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

$$x^2=16$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=4 \end{array}\right.$$

$$x^2=-1$$

Корней нет

Ответ: -4;4.

Проверь себя!

$$в)\, x-\sqrt{2-x}=0$$

$$x=\sqrt{2-x}$$

$$x^2=2-x$$

$$x^2+x-2=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Проверка:

$$x=-2$$

$$-2-\sqrt{2-(-2)}\neq 0$$

-2-посторонний корень

$$x=1$$

$$1-\sqrt{2-1}=0$$

Ответ: 1.

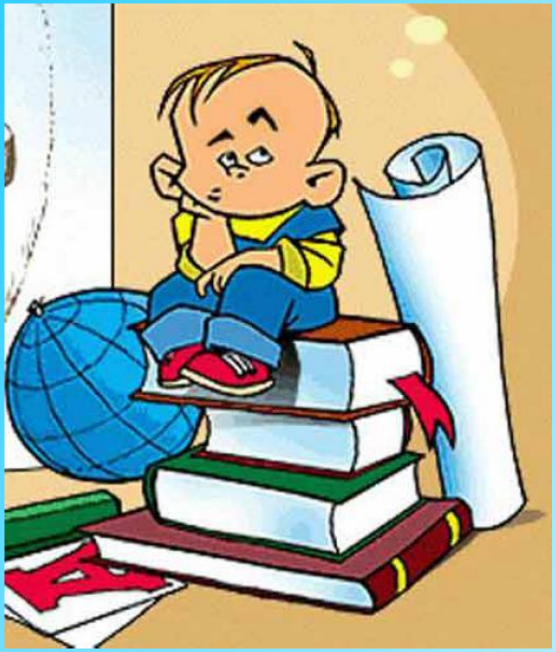
Проверь себя!

2.Сократить дробь:

$$\frac{5x^2+3x-2}{25x^2-4}=\frac{5(x-\frac{2}{5})(x+1)}{(5x-2)(5x+2))}=\frac{(5x-2)(x+1)}{(5x-2)(5x+2)}=\frac{x+1}{5x+2}$$

$$5x^2+3x-2=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{5} \\ x=-1 \end{array}\right.$$



Проверь себя!

3. $x^2 - ax + 9 = 0$

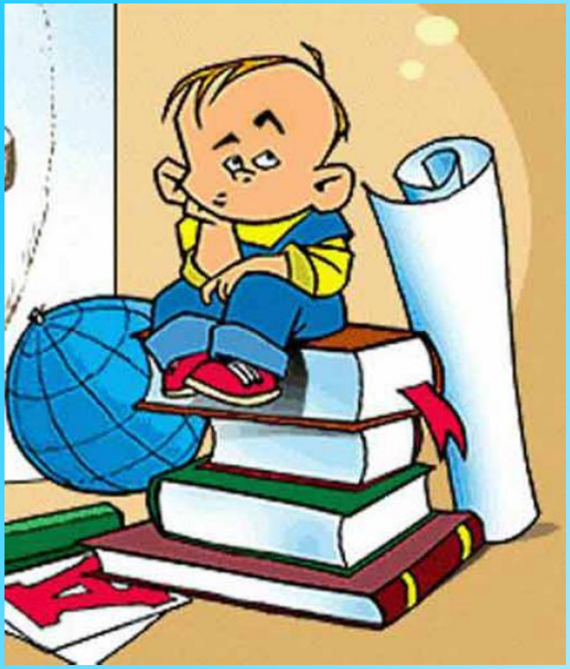
Квадратное уравнение имеет один корень, если D=0;

$$D = a^2 - 36$$

$$a^2 - 36 = 0$$

$$a^2 = 36$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -6 \\ a = 6 \end{array}\right.$$



Ответ: a=-6;a=6.

Составьте математическую модель для решения задачи:

В прямоугольном треугольнике один катет меньше гипотенузы на 4 см, а другой – на 8 см. Найдите гипотенузу.

$$(x-4)^2+(x-8)^2=x^2$$

Домашнее задание:

1.Решите уравнения:

$$а)\ \frac{7}{x+1} - \frac{6}{x} = 0;$$

$$б)\ x^2(x^2+3) = 4;$$

$$в)\ \sqrt{5x-4} - x = 0$$

2.Сократите дробь:

$$\frac{2x^2+11x-21}{4x^2-9}$$

3.При каком значении параметра а уравнение $x^2+2ax+9=0$ имеет один корень?

Использованные ресурсы

1.Ш.А.Алимов.Алгебра.Учебник для 8 класса.
М. :Просвещение, 2007

2.М.В.Ткачева.Алгебра 8 класс. Дидактические материалы к учебнику Алимова. -М. :Просвещение, 2011.

3.Изображения:

Диофант http://lunkina.hop.ru/diofant.jpg

Бхаскара http://living-smartly.com/wp-content/uploads/2013/02/Bhaskarach%C4%81rya.jpg

Ал-Хорезми http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/384/383503/383503_html_64e7f358.jpg

Вавилонhttp://forexaw.com/TERMs/Geografiya/img228249_4-9_Mesopotamiya.jpg

Веселая картинка http://mobka.info/sys/data/avators/3/gsiGQM.jpg