Решение неравенств из ЕГЭ методом равносильных преобразований

СМИРНОВА Р.М. - учитель математики
ГБОУ СОШ п.г.т. Осинки

Основные ошибки при решении неравенств (С3)

- Ошибки в применении свойств логарифма.
- Плохое знание свойств логарифмической функции, показательной.
- Неумение применять замену переменной.
- Неумение применять метод интервалов при решении неравенств повышенного и высокого уровней сложности.
- Неумение применять метод равносильных преобразований, при решении неравенств повышенного и высокого уровней сложности.
- Некорректное использование систем и совокупностей.
- Незнание рациональных методов решения неравенств повышенного и высокого уровня сложности.

Рациональный метод решения неравенств – метод равносильных преобразований по знаку

- Этот метод не относится к стандартным школьным, но позволяет многие неравенства решать быстро и красиво.

- С помощью условий равносильности будем сводить решение многих неравенств, содержащих показательные, логарифмические, иррациональные выражения и выражения с модулем, к решению рациональных неравенств классическим методом интервалов для рациональных функций.

Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$

Правило 1: Знак выражения $\sqrt{f(x)}$ совпадает со знаком выражения ***f(x)*** в ОДЗ.

Правило 2: Знак разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности ***f(x) – g(x)*** в ОДЗ.

Пример : $\frac{\sqrt{2x^2-3x-5}}{\sqrt{x-2}} < \sqrt{x+1}$

Решение:

1.ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 3x - 5 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$

2.Применяем метод равносильных преобразований по знаку

$\frac{\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x-2}} < 0;$ $\quad \frac{x^2-2x-3}{x-2} < 0$

$\frac{(x+1)(x-3)}{x-2} < 0$

3. Учитываем ОДЗ.

Ответ: $[-\frac{5}{2}; 3)$.

Неравенства, содержащие выражения с модулем

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$

Правило 1: Знак разности модулей $|f(x)| - |g(x)|$ совпадает со знаком произведения $(f(x)-g(x))\,(f(x)+g(x))$.

Правило 2: Знак выражения $|f(x)| - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $(f(x))^2 - g(x)$ в ОДЗ.

Пример:

$$(\sqrt{3x+5} - \sqrt{x+3})(|x-4| - x^2 - 2) < 0$$

Решение:

1. ОДЗ: $\begin{cases} 3x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$

2. Выполняем равносильные преобразования по знаку по правилам:

$$(3x+5-x-3)((x-4)^2 - (x^2+2)^2) < 0$$

Решаем методом интервалов, учитывая ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: $-2 < x < -1;\ x > 1.$

Неравенства, содержащие показательные и логарифмические выражения

Выведем такие условия равносильности, которые часто за один шаг сведут решение самых распространенных неравенств, содержащих показательные и логарифмические выражения, к решению рациональных неравенств.

Показательные неравенства

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

- Если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$ и $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$
- Если $0 < a < 1$, $f(x) < g(x)$ и снова $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$.

Таким образом, мы вывели условие равносильности.

Правило 1: Знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x) - g(x))$.

При конкретном a неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, конечно, может быть решено стандартным способом, и объем выкладок тот же, но здесь есть некоторое преимущество – не надо задумываться над тем, какое a: больше оно или меньше 1.

Правило 2: Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ ($a(x) > 0$, $a(x)$ может быть равно 1, если $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$).

Показательные неравенства

Пример 1:

$$\frac{(3^x - 1)(2^{x^2} - 16)}{x^2 + x - 2} \geq 0$$

Решение:

1. ОДЗ: $x^2 + x - 2 \neq 0$

2. Применяем равносильное преобразование по знаку по правилу 1:

$$\frac{(x-0)(x^2-4)}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

Решаем методом интервалов, учитываем ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: $0 < x < 1; x \geq 2.$

Неравенства, содержащие показательные выражения

Пример 2:

$1 \leq 3^{\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right|} \leq 27$

Решение:

$3^0 \leq 3^{\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right|} \leq 3^3$

Используя равносильную замену по знаку для показательной функции, получаем:

$(3-1)(\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right| - 3) \leq 0$, используя равносильную замену для модуля, получаем:

$\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)^2 - 3^2 \leq 0$

$\frac{x(5x-3)}{(2x-1)^2} \geq 0$

$\frac{x(x-\frac{3}{5})}{(x-\frac{1}{2})^2} \geq 0$, решаем методом интервалов получаем ответ.

Ответ: $x \leq 0$; $x \geq \frac{3}{5}$; $x = \frac{3}{4}$.

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$.

- Если $a > 1$, то $\log_a f(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) > 1$, то есть $(a-1)(f(x)-1) > 0$.
- Если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) < 1$, то есть опять $(a-1)(f(x)-1) > 0$.

Правило 1: Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ.

Правило 2: Знак функции $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ.

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Рассмотрим неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$,

$a > 0$, $a \neq 1$, $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- Если $a > 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) > g(x)$, то есть $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$
- Если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) < g(x)$ то есть опять $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$.

Правило 3: Знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ.

Правило 4: Знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ.

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Пример 1:

$(\log_{0,2}(3x+1)+\log_5(x-1))\cdot(\log_{0,2}(x+5))^{-1}\geq 1$

Решение:

1. ОДЗ: $\begin{cases} 3x+1>0 \\ x-1>0 \\ x+5>0 \end{cases}$

2.

$$\frac{\log_{0,2}\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)-\log_{0,2}(x+5)}{\log_{0,2}(x+5)}\geq 0$$

Применяя равносильные преобразования по знаку для логарифмической функции по правилам 3 и 1 получаем:

$$\frac{(0{,}2-1)(\frac{3x+1}{x-1}-(x+5))}{(0{,}2-1)(x+5-1)}\geq 0$$

Решаем неравенство методом интервалов, учитываем ОДЗ и получаем ответ.

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Пример 2:

$$\log_{(10-x^2)}\left(\frac{16x}{5}-x^2\right)<1$$

Решение:

1. ОДЗ: $\begin{cases}(10-x^2)>0\\(10-x^2)\neq 0\\\frac{16x}{5}-x^2>0\end{cases}$

2. Воспользуемся условием равносильного перехода по знаку для логарифмической функции по правилу 3.

   $(10-x^2-1)\left(\frac{16x}{5}-x^2-10+x^2\right)<0$

   $(x-3)(x+3)(x-\frac{25}{8})>0$

3. Решаем неравенство методом интервалов, учитываем ОДЗ и получаем ответ.

   Ответ: $0<x<3,\ \ \frac{25}{8}<x<\sqrt{10}.$

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Пример 3:

$$\log_{\left|x-\frac{7}{4}\right|}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \le 0$$

Решение:

1. ОДЗ: $\begin{cases} \left|x-\frac{7}{4}\right| \ne 1 \\ \left|x-\frac{7}{4}\right| > 0 \\ \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

2. Воспользуемся условием равносильного перехода по знаку для логарифмической функции по правилу 2 и для модуля по правилу 1:

$$\left(\left|x-\frac{7}{4}\right|-1\right)\left(\left(\log_{\frac{1}{2}} x-1\right)\right) \le 0$$

$$\left(x-\frac{7}{4}-1\right)\left(x-\frac{7}{4}+1\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \le 0$$

3. Решаем неравенство методом интервалов, учитываем ОДЗ и получаем ответ.

Ответ: $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}$.

Список использованной литературы

- Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. – М.: Айрис-пресс, 2005.
- Власова А.П. Математика: тема «Уравнения и неравенства»: тестовые задания базового, повышенного и высокого уровня сложности.-М.: АСТ Астрель.
- Математика в школе (научно – теоретический и методический журнал), 6/2008.
- Математика в школе (научно – теоретический и методический журнал), 9/2011, 6/2011.