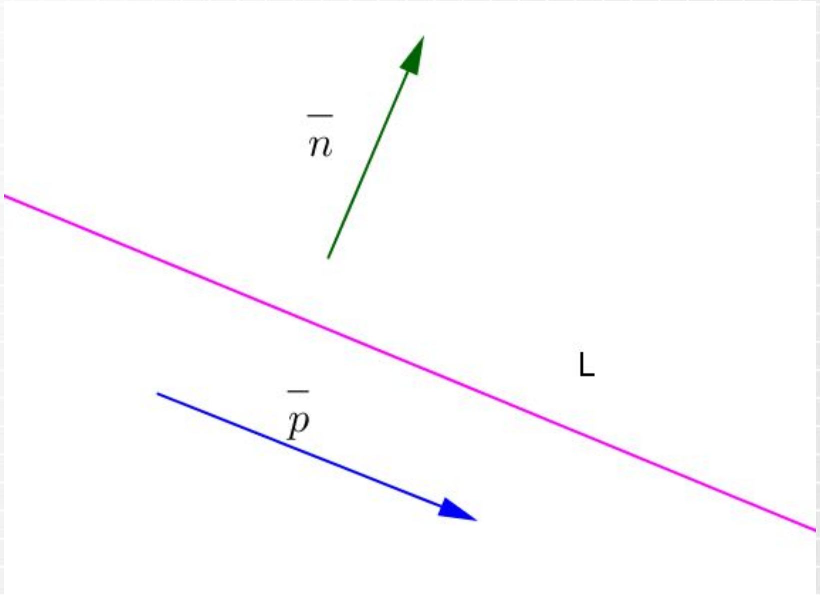
КеАҚ Республикалық физика-математика мектебі

Түзудің теңдеуі және оның түрлері

Дайындаған: мұғалім Шинасилова С.С.

2015-2016 оқу жылы

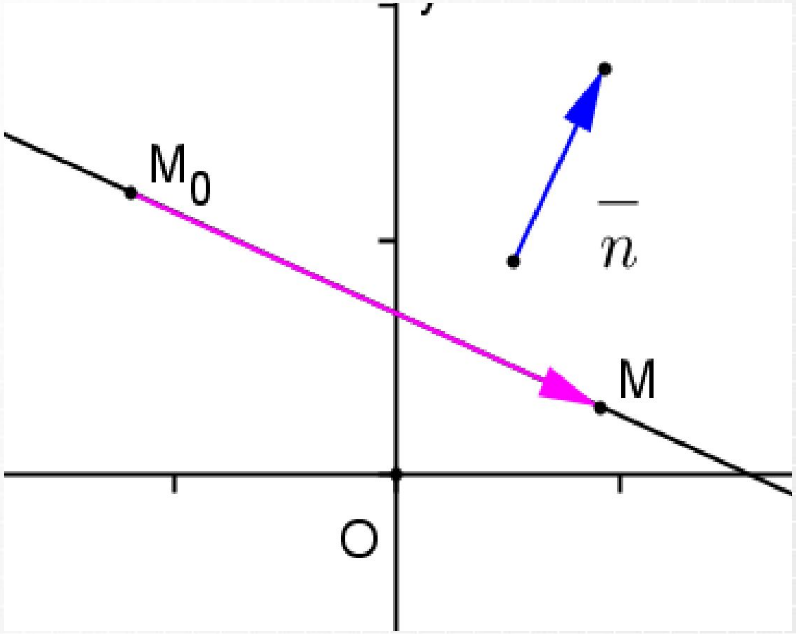
Анықтамалар



Анықтама. $\vec{n} \perp l \Rightarrow \vec{n}$ векторы l түзуінің нормаль векторы деп аталады.

Анықтама. $\vec{p} \parallel l \Rightarrow \vec{p}$ векторы l түзуінің бағыттаушы векторы деп аталады.

Түзудің жалпы теңдеуі



$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

$$M_0(x_0; y_0), \vec{n}(a; b);$$

$$M_0 \in l, \vec{n} \perp l;$$

$$l_m - ?$$

Түзудің жалпы теңдеуі.

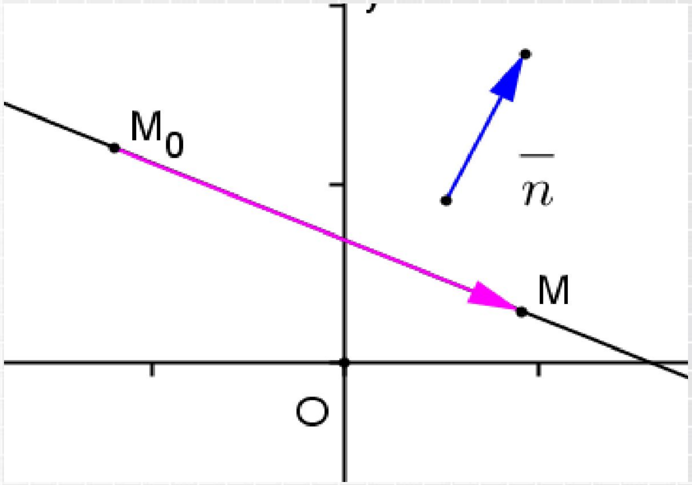
$$M_0(x_0;y_0), \vec{n}(a;b); M_0 \in l, \vec{n} \perp l; l_m - ?$$

$$M \in l, M(x;y); \overrightarrow{M_0M}(x-x_0; y-y_0);$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Rightarrow$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$$

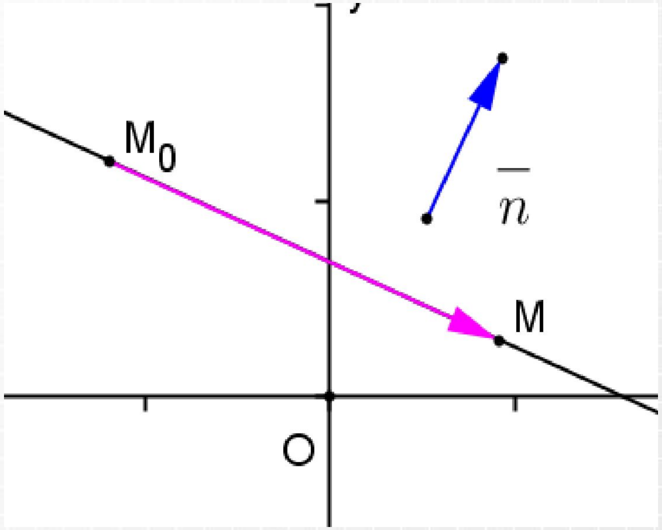
$$ax+by+\underbrace{(-ax_0-by_0)}_{c}=0 \Rightarrow ax+by+c=0.$$



$\boxed{ax+by+c=0}$ түзудің жалпы теңдеуі

$\vec{n}(a;b)$ түзудің нормаль векторы

$M_0(x_0;y_0)$ **нүктесі арқылы өтіп,** $\bar{n}(a;b)$ **нормаль векторға перпендиукуляр түзудің теңдеуі.**



$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$$

Мысал. $K(3;-7)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(2;-5)$ векторына перпендикуляр болатын түзудің жалпы теңдеуін жазыңдар.

Мысал. $K(3;-7)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(2;-5)$ векторына перпендикуляр болатын түзудің жалпы теңдеуін жазыңдар.

Шешуі. $A=2,\ B=-5 \Rightarrow 2x-5y+C=0.$ $K(3;-7)$ нүктесі түзуде жататындықтан, оның координаталары теңдеуді қанағаттандырады:

$$2\cdot 3-5\cdot(-7)+C=0 \Leftrightarrow 6+35+C=0 \Leftrightarrow C=-41.$$

Табылған мәнді теңдеуге қойып, түзудің теңдеуін жазамыз:

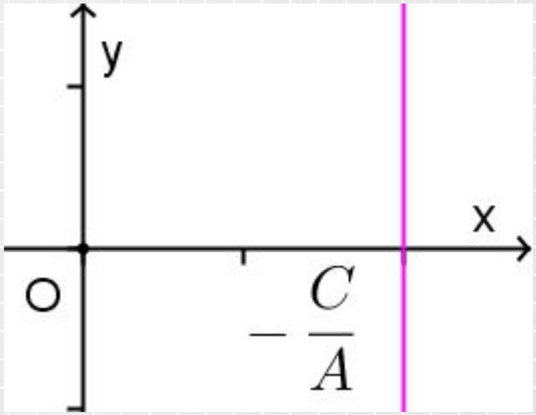
$$2x-5y-41=0.$$

Жауабы: $2x-5y-41=0.$

Түзудің жалпы теңдеуінің дербес жағдайлары.

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0;$$

$$B = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A};$$



$$A = 0 \Rightarrow$$

$$B \neq 0 \Rightarrow$$

$$C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0 \Rightarrow$$

$$C = 0,\ A = 0,\ B \neq 0 \Rightarrow$$

$$C = 0,\ B = 0,\ A \neq 0 \Rightarrow$$

Түзудің жалпы теңдеуінің дербес жағдайлары.

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0;$$

$$B = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A};$$

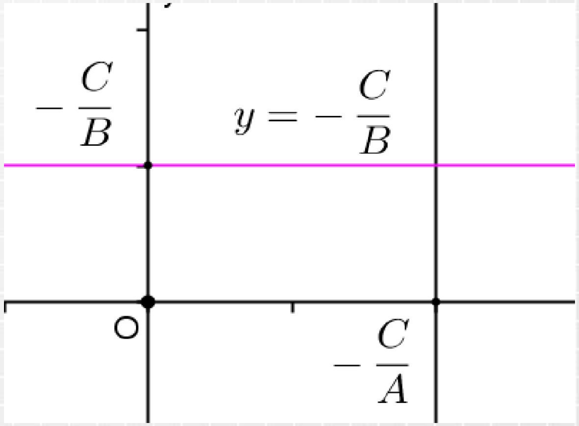
$$A = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B};$$

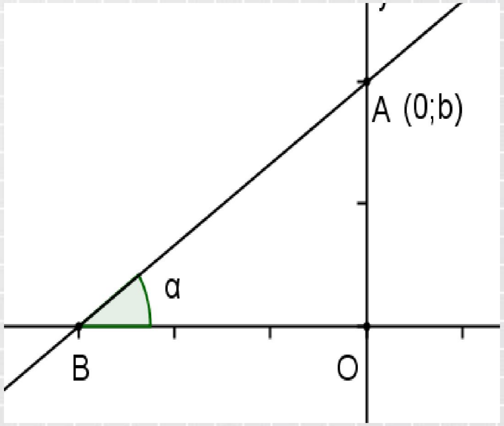
$$B \neq 0 \Rightarrow y = -\underbrace{\frac{A}{B}}_{k}x - \underbrace{\frac{C}{B}}_{b} \Rightarrow y = kx + b;$$

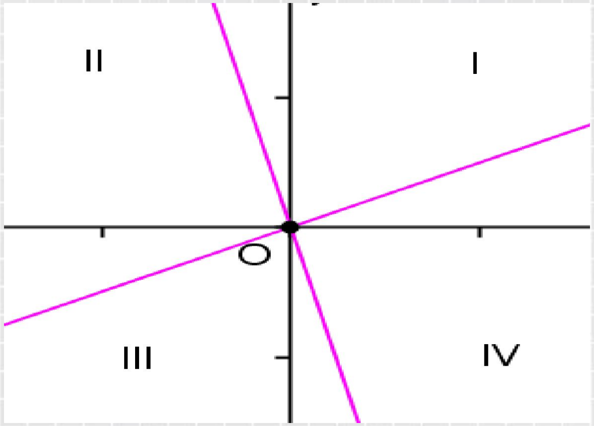
$$C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0 \Rightarrow Ax + By = 0;$$

$$C = 0,\ A = 0,\ B \neq 0 \Rightarrow By = 0 \Leftrightarrow y = 0;$$

$$C = 0,\ B = 0,\ A \neq 0 \Rightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$



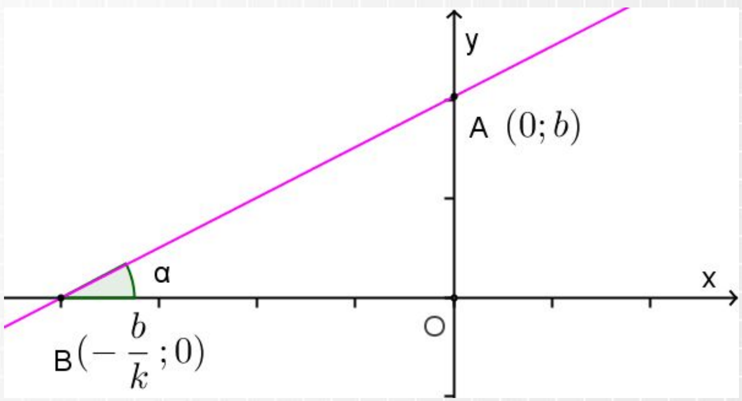


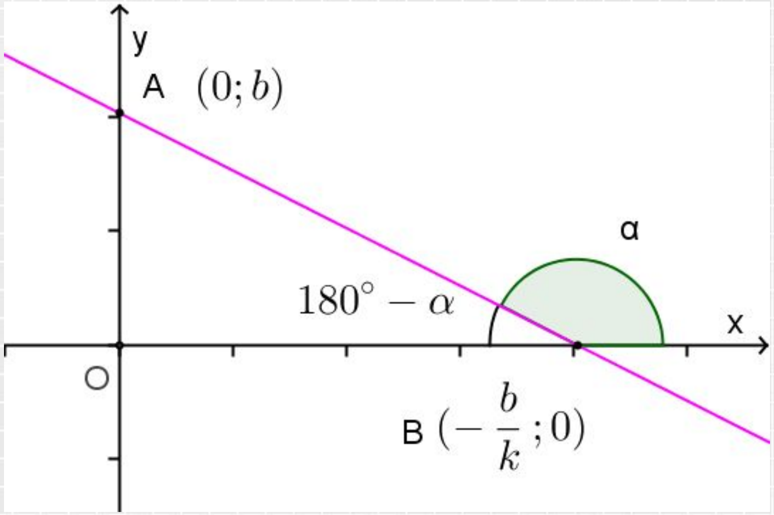


Түзудің бұрыштық коэффициентпен теңдеуі

$\boxed{y = kx + b}$ $k = tg\alpha$ түзудің бұрыштық коэффициенті;

α түзудің абсцисса осінің оң бағытымен жасайтын бұрышы;

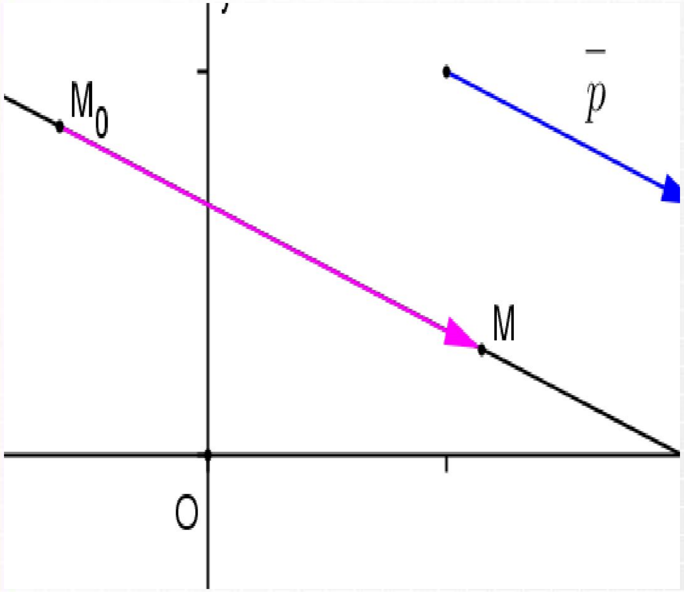




$$tg\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{b}{\frac{b}{k}} = k;$$

$$0 \le \alpha < \pi, \alpha \ne \frac{\pi}{2};$$

Түзудің канондық теңдеуі.



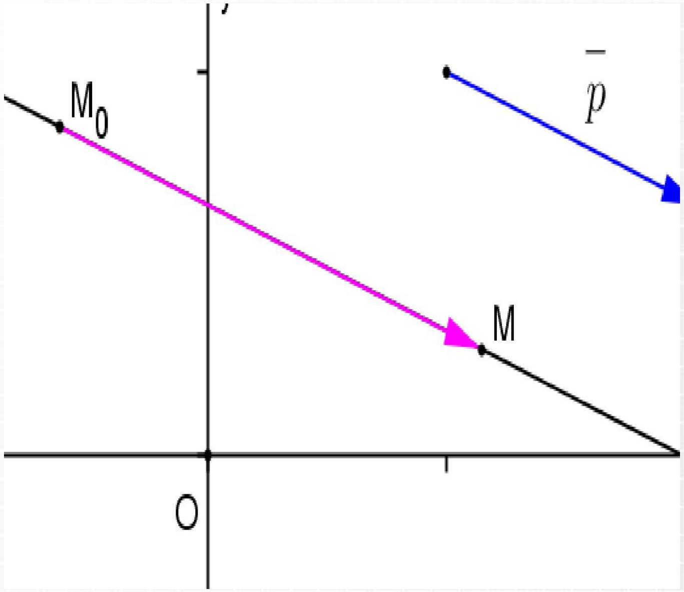
$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}$$

$\vec{p}(\mathrm{m};\mathrm{n})$ түзудің бағыттаушы векторы

$M_0(x_0;y_0),\vec{p}(\mathrm{m};\mathrm{n});$

$M_0\in l,\vec{p}\parallel l;l_m-?$

Түзудің канондық теңдеуі.



$$M_0(x_0;y_0),\ \vec{p}(\mathrm{m};\mathrm{n});$$

$$M_0 \in l,\ \vec{p} \parallel l;\ l_m - ?$$

$$M \in l,\ M(x;y);$$

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0);$$

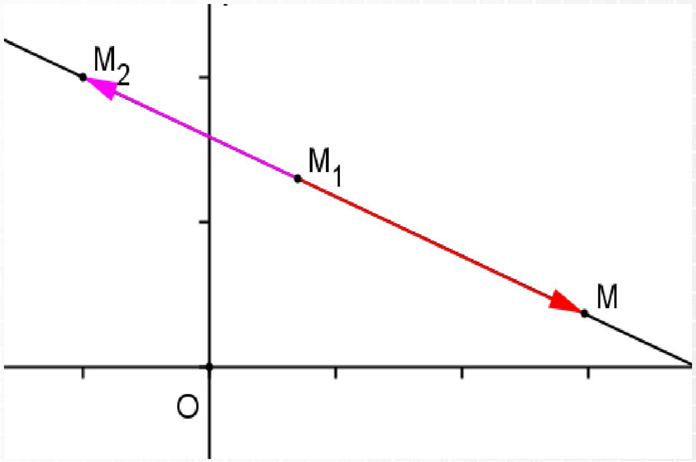
$$\vec{n} \parallel \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}}$$ түзудің канондық теңдеуі

$\vec{p}(\mathrm{m};\mathrm{n})$ түзудің бағыттаушы векторы

$$ax+by+c=0 \Rightarrow \vec{p}(-b;a);$$

Түзудің екі нүкте арқылы өтетін теңдеуі

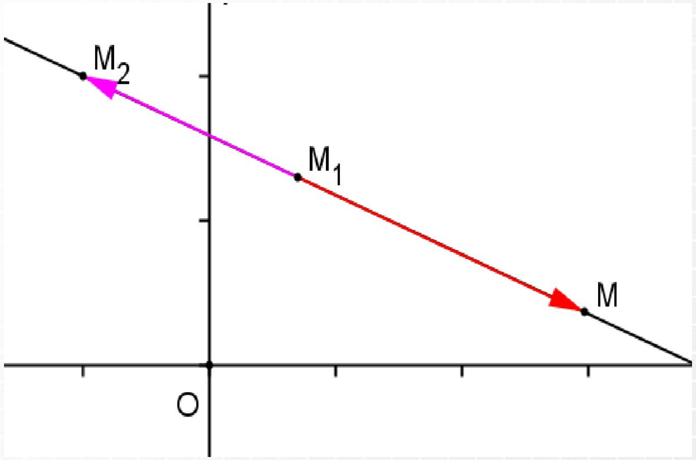


$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

$$M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2);$$

$$M_1\in l, M_2\in l; l_m-?$$

Түзудің екі нүкте арқылы өтетін теңдеуі



$$M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2);$$

$$M_1\in l, M_2\in l; l_m - ?$$

$$x_1\ne x_2, y_1\ne y_2; M\in l, M(x;y);$$

$$\overrightarrow{M_1M}(x-x_1;y-y_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

түзудің екі нүкте арқылы өтетін теңдеуі

Мысал. $A(3;-1)$ және $B(0;2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

Мысал. $A(3;-1)$ және $B(0;2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

Шешуі.

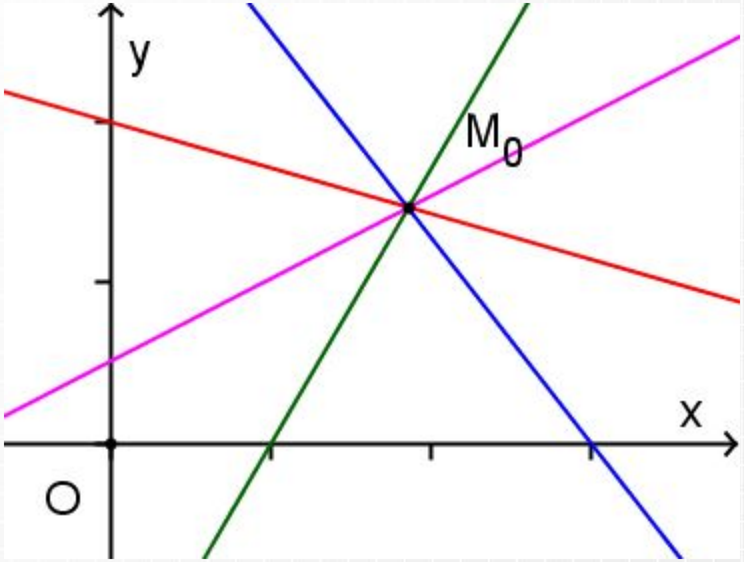
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-3}{0-3}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y+1}{3}\Leftrightarrow -x+3=y+1\Leftrightarrow x+y-2=0\Leftrightarrow$$

$$y=-x+2.$$

Жауабы: $y=-x+2.$

Түзулер шоғы.



$$M_0(x_0; y_0), k; l_m - ?$$

$$y = kx + b \Rightarrow y_0 = kx_0 + b \Leftrightarrow$$

$$b = y_0 - kx_0 \Rightarrow$$

$$y = kx + y_0 - kx_0 \Leftrightarrow$$

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$$ түзулер шоғының теңдеуі

M_0 түзулер шоғының центрі

Мысал.

$M\left(2;-1\right)$ нүктесі арқылы өтетін және Ox өсімен $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазыңдар.

Мысал.

$M\left(2;-1\right)$ нүктесі арқылы өтетін және Ox өсімен $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазыңдар.

Шешуі. $k = tg\alpha \Rightarrow k = tg\dfrac{3\pi}{4} = -1;$

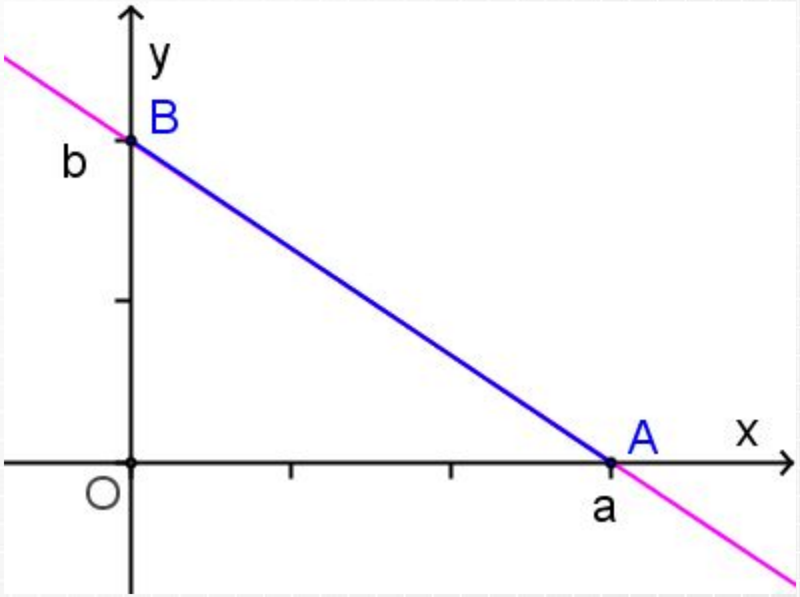
$y - y_0 = k(x - x_0)$ түзулер шоғының теңдеуінен:

$$y-\left(-1\right) = -1\cdot(x-2) \Leftrightarrow \text{y}+1 = -x+2 \Leftrightarrow y = -x+1;$$

Жауабы: $y = -x + 1.$

Түзудің кесіндідегі теңдеуі.

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.}$$



$$Ax+By+C=0 \Leftrightarrow$$

$$Ax+By=-C \;/\; \div(-C\neq 0) \;\Rightarrow$$

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1,$$

$$-\frac{C}{A}=a,\;\; -\frac{C}{B}=b \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

2-тәсіл.

$$A(a;0),\; B(0;b), a\neq 0, b\neq 0 \Rightarrow \frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

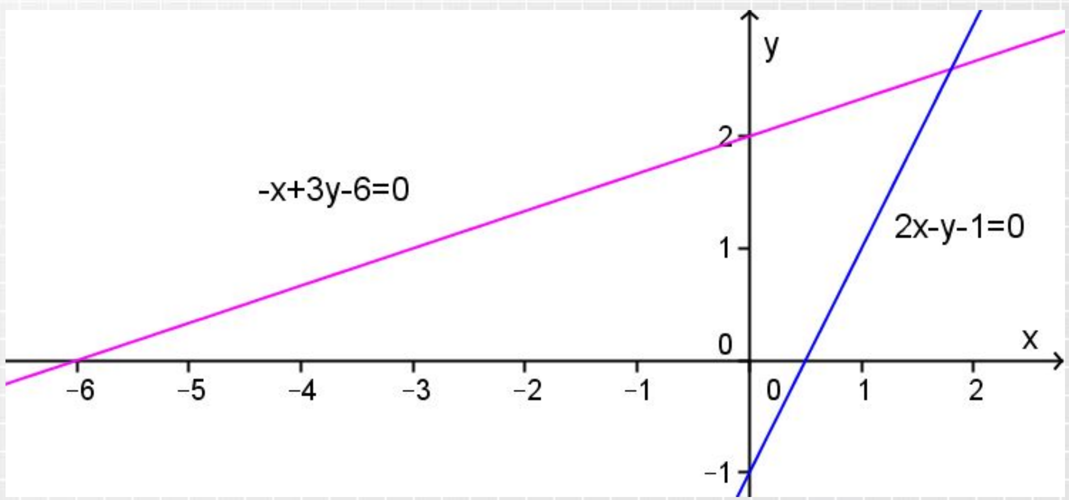
Мысал. $2x - y - 1 = 0, \ \ -x + 3y - 6 = 0$ түзулерінің теңдеулерін кесіндідегі түрін жазып, графигін салыңдар.

Мысал. $2x - y - 1 = 0, \quad -x + 3y - 6 = 0$
түзулерінің теңдеулерін кесіндідегі түрін жазып, графигін салыңдар.

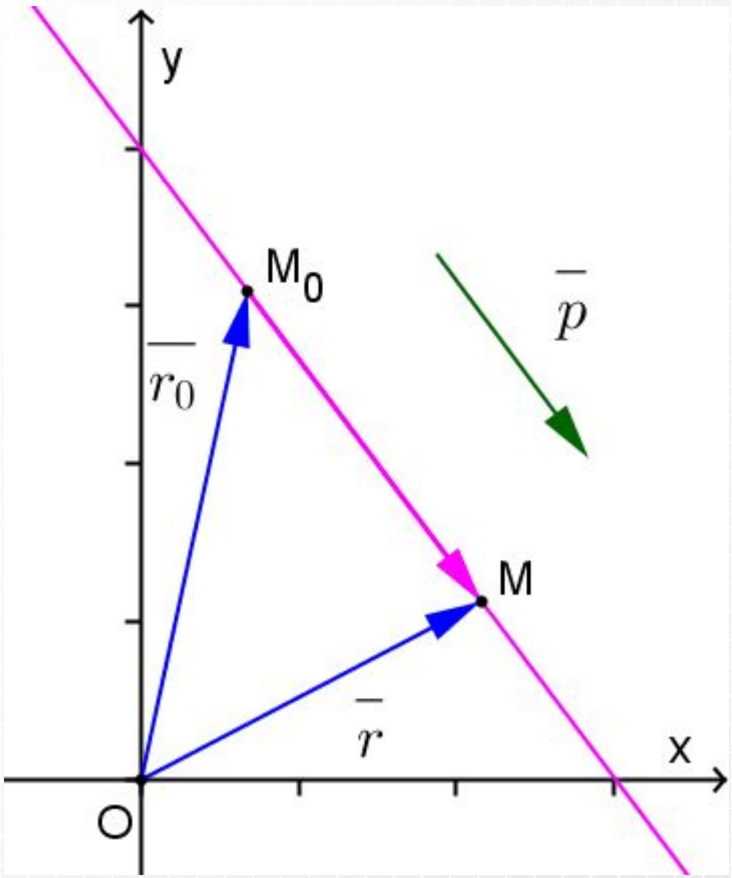
Шешуі.

$$2x - y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1, a = \frac{1}{2}, b = -1;$$

$$-x + 3y = 6 \Leftrightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{2} = 1, a = -6, b = 2;$$



Түзудің векторлық теңдеуі



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{p}}$$

$$M_0(x_0; y_0), \vec{p}(\mathrm{m}; \mathrm{n});$$

$$M_0 \in l, \vec{p} \parallel l; l_{век.т.} - ?$$

$$M \in l, M(x; y);$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}, \overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0; \overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0;$$

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p} \Rightarrow \exists t \neq 0 : \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{p};$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{p} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{p};$$

Түзудің параметрлік теңдеуі.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=t,\\ \dfrac{y-y_0}{n}=t;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt.\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt.\end{cases}}$$

түзудің параметрлік теңдеуі

t – *параметр*

Түзудің теңдеуінің түрлері

1. $ax + by + c = 0;$
2. $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0;$
3. $y = kx + b;$
4. $y = y_0;$
5. $x = x_0;$
6. $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n};$
7. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1};$
8. $y - y_0 = k(x - x_0);$
9. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1;$
10. $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{p};$
11. $\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t. \end{cases}$

Түзудің жалпы теңдеуі;
Берілген нүктеден өтетін, нормаль векторға перпендикуляр түзудің теңдеуі;
Түзудің бұрыштық коэффициентпен теңдеуі;
Түзудің абсцисса, ордината остеріне параллель теңдеулері;
Түзудің канондық теңдеуі;
Түзудің екі нүкте арқылы өтетін теңдеуі;
Түзулер шоғы;
Түзудің кесіндідегі теңдеуі;
Түзудің векторлық теңдеуі;
Түзудің параметрлік теңдеуі.

Есептер шығару

1. АВС үшбұрышының төбелерінің координаталары берілген: А(4;6), В(-4;0), С(-1;-4). СМ медианасы жататын түзу теңдеуін жазыңдар.

2. М(2;5) нүктесі арқылы өтетін, координаталар осьтеріне параллель түзулердің теңдеулерін жазыңдар.

3. M_1 және M_2 нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін жазыңдар:

1) $M_1(1;2), M_2(-1;0)$; 2) $M_1(7;-2), M_2(-3;4)$;

3) $M_1(1;1), M_2(-1;-2)$; 4) $M_1(2;-2), M_2(0;2)$;

4. M_0 нүктесі мен $\vec{n}$ нормаль векторы бойынша берілген түзу теңдеуін жазыңдар:

1) $M_0(2;-1), \vec{n}(-3;2)$; 2) $M_0(-3;4), \vec{n}(3;5)$;

3) $M_0(2;-3), \vec{n}(0,5;2,5)$; 4) $M_0\left(\frac{2}{3};-1,5\right), \vec{n}(0;1)$;

5. k бұрыштық коэффициенті мен M_0 нүктесі бойынша берілген түзу теңдеуін жазыңдар:

1) $k=1, M_0(0;1)$; 2) $k=-2, M_0(1;-2)$;

3) $k=\frac{1}{2}, M_0(1;0)$; 4) $k=-\frac{1}{3}, M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$;

6. M_0 нүктесі мен $\vec{p}$ бағыттаушы векторы бойынша берілген түзу теңдеуін жазыңдар:

1) $M_0(-3;2), \vec{p}(2;-1)$; 2) $M_0(3;5), \vec{p}(-3;4)$;

3) $M_0(5;1), \vec{p}(0,5;2,5)$; 4) $M_0(0;1), \vec{p}\left(\frac{1}{3};1\frac{1}{2}\right)$;