



# ***КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА***

**Выполнила  
Лестова Елена Валериевна,  
учитель первой категории  
МОУ «Гимназия №1».  
Город Саратов, 2009.**

Квадратным неравенством с одной переменной  $x$  называют неравенство вида  $ax^2+bx+c>0$  ( $ax^2+bx+c<0$ ), где  $a, b, c$  – действительные числа,  $a \neq 0$ .

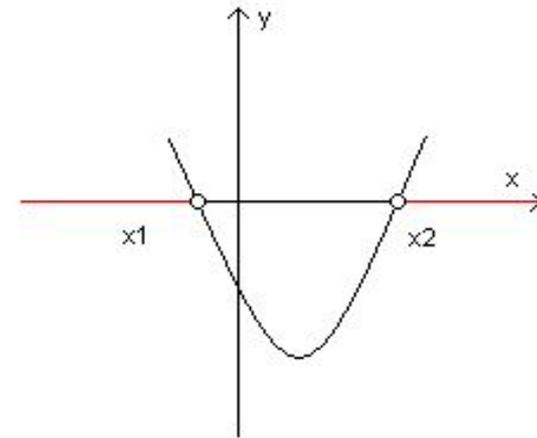
Значение переменной  $x$ , которое обращает неравенство  $f(x)>0$  ( $f(x)<0$ ) в верное числовое неравенство, называют решением неравенства (или частным решением). Множество всех частных решений неравенства называют  $\neq$  общим решением (или просто решением) неравенства.

# 1. $D > 0$

$a > 0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  – корни КВТР,  $x_1 < x_2$

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1, \\ x > x_2. \end{cases}$$

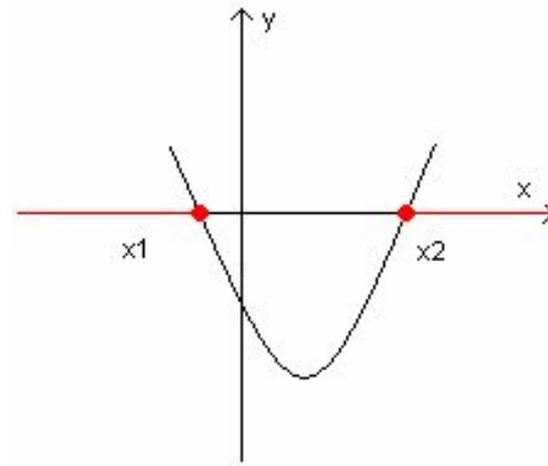
Ответ:  $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$



$a > 0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  – корни КВТР,  $x_1 < x_2$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1, \\ x \geq x_2. \end{cases}$$

Ответ:  $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

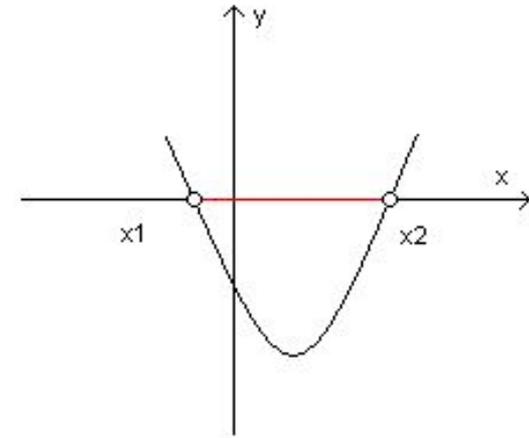


**D>0**

$a>0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  – корни КВТР,  $x_1 < x_2$

$$ax^2+bx+c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$$

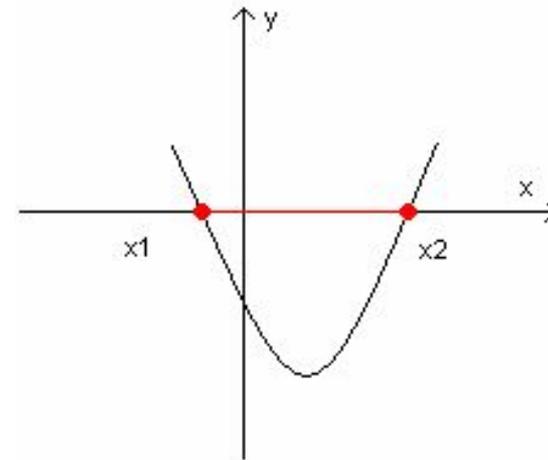
Ответ:  $(x_1; x_2)$



$a>0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  – корни КВТР,  $x_1 < x_2$

$$ax^2+bx+c \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$$

Ответ:  $[x_1; x_2]$



## 2. $D < 0$

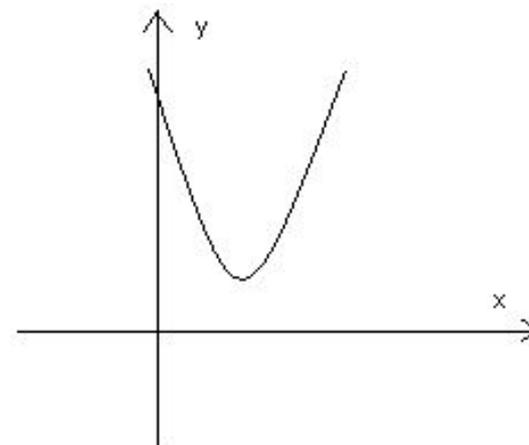
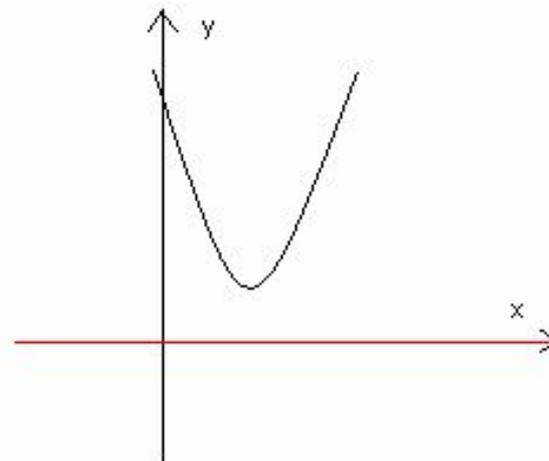
$a > 0$ , КВТР не имеет действительных корней

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$(ax^2 + bx + c \geq 0)$$

Ответ:  $(-\infty; +\infty)$

$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$(ax^2 + bx + c \leq 0)$$

Ответ: нет решений



### 3. $D=0$

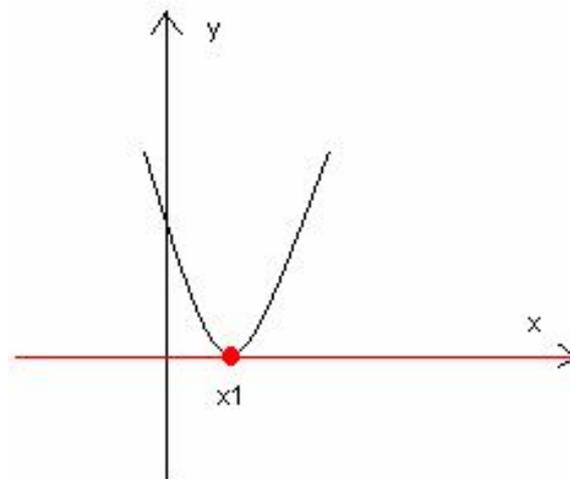
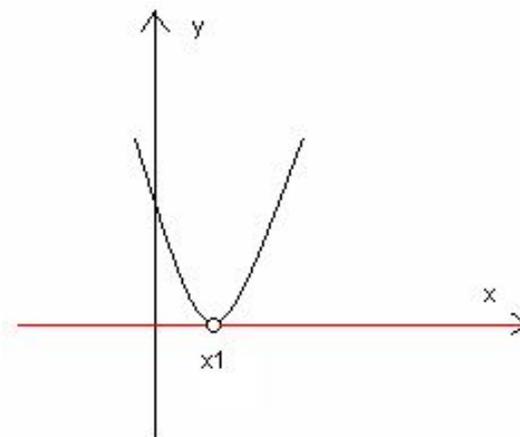
$a > 0$ , КВТР имеет два равных корня  $x_1 = x_2$

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > x_1 \\ x < x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq x_1$$

Ответ:  $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x_1 \\ x \leq x_1 \end{cases} \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty$$

Ответ:  $(-\infty; +\infty)$

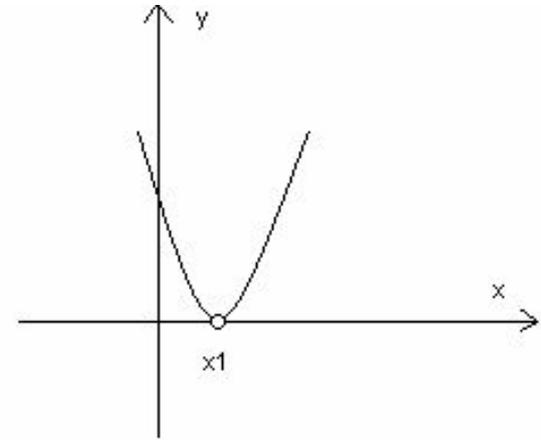


**D=0**

$a > 0$ , КВТР имеет два равных корня  $x_1 = x_2$

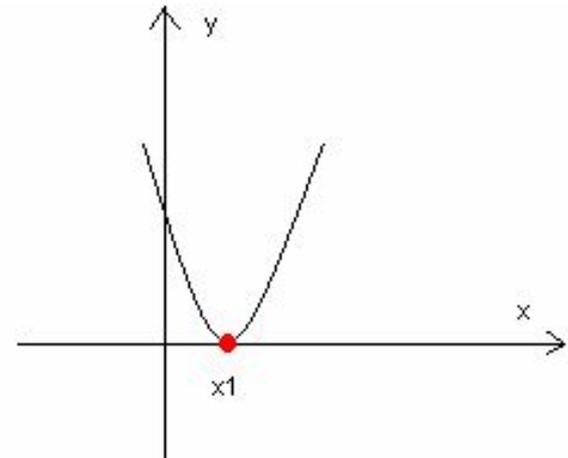
$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 < 0$$

Ответ: решений нет



$$ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$$

Ответ:  $x_1$



# Примеры

## Пример 1.

$$16-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

Ответ:  $[-4; 4]$

## Пример 2.

$$5x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 5(x+1)(x - \frac{3}{5}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Ответ:  $(-\infty; -1] \cup [\frac{3}{5}; +\infty)$

## Пример 3.

$$7x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x > 0 \Leftrightarrow x(x-7) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7, \\ x < 0. \end{cases}$$

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$

## Пример 4.

$$x^2 + x + 7 < 0$$

Т. к.  $D = 1 - 28 = -27$ , то  $x^2 + x + 7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ответ: решений нет

## Пример 5.

$$x^2 - 8x + 7 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+7) < 0 \Leftrightarrow -7 < x < 1$$

Ответ:  $(-7; 1)$

## Пример 6.

$$x^2 + 4x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Ответ:  $x = -2$

## Пример 7.

Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - 12x + 11}$$

$$x^2 - 12x + 11 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-11) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 11, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ:  $(-\infty; 1] \cup [11; +\infty)$

## Пример 8.

Найдите область определения функции

$$y = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{-x^2 + 29x - 28}}$$

$$-x^2 + 29x - 28 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 29x + 28 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-28) < 0 \Leftrightarrow$$

$$1 < x < 28$$

Ответ:  $(1; 28)$