КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Выполнила

Лестова Елена Валериевна,

учитель первой категории

МОУ «Гимназия №1».

Город Саратов, 2009.

Квадратным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ $(ax^2+bx+c<0)$, где a, b, c – действительные числа, $a \neq 0$.

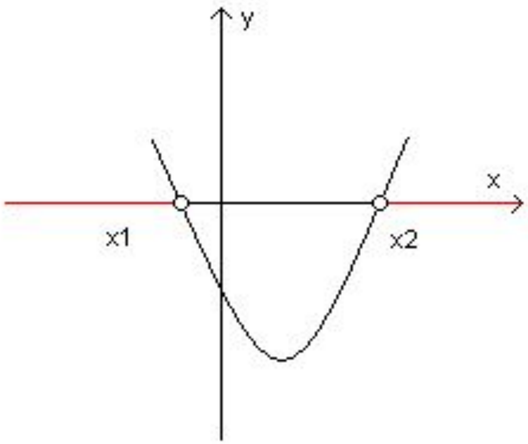
Значение переменной x, которое обращает неравенство $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ в верное числовое неравенство, называют решением неравенства (или частным решением). Множество всех частных решений неравенства называют общим решением (или просто решением) неравенства.

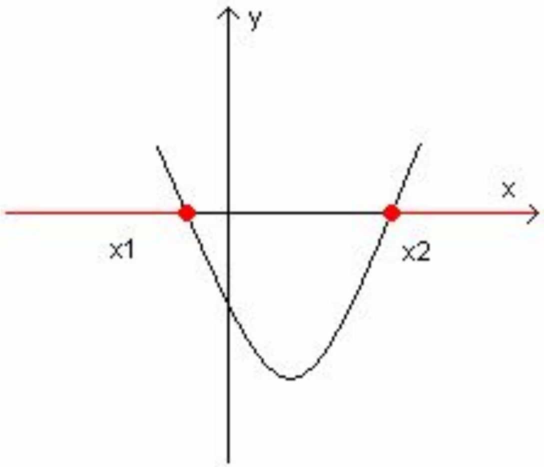
1. D>0

$a>0$, x_1 и x_2 – корни КВТР, $x_1<x_2$

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1, \\ x > x_2. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$





$a>0$, x_1 и x_2 – корни КВТР, $x_1<x_2$

$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq x_1, \\ x \geq x_2. \end{array}\right.$

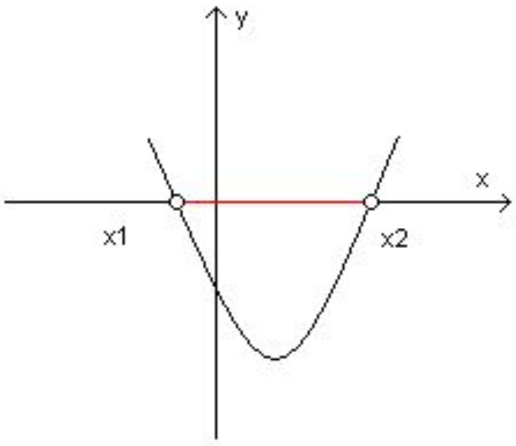
Ответ: $(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$

D>0

$a>0$, x_1 и x_2 – корни КВТР, $x_1<x_2$

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x_1<x<x_2$

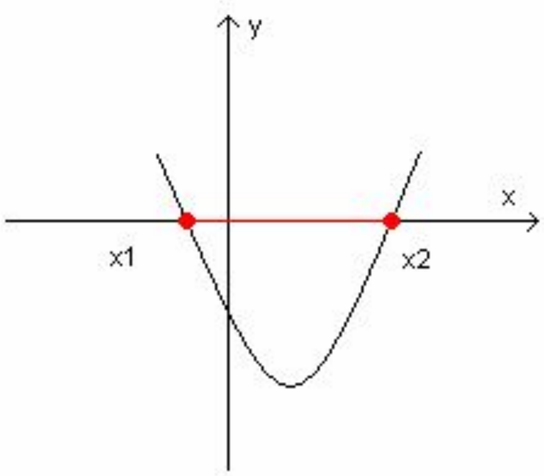
Ответ: $(x_1;x_2)$



$a>0$, x_1 и x_2 – корни КВТР, $x_1<x_2$

$ax^2+bx+c\le 0 \Leftrightarrow x_1\le x\le x_2$

Ответ: $[x_1;x_2]$

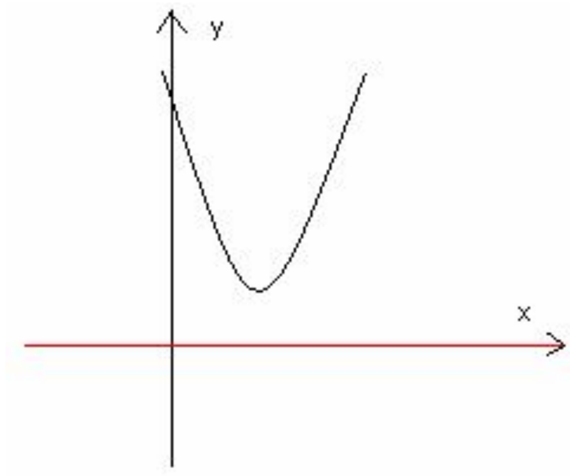


2. D<0

a>0, КВТР не имеет действительных корней

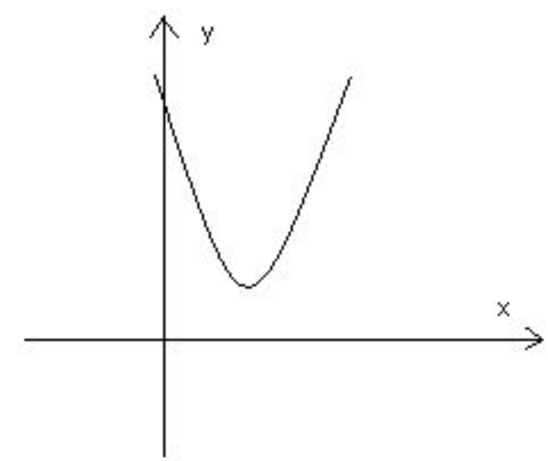
$ax^2+bx+c>0$
$(ax^2+bx+c\geq 0)$

Ответ: $(-\infty;+\infty)$



$ax^2+bx+c<0$
$(ax^2+bx+c\leq 0)$

Ответ: нет решений

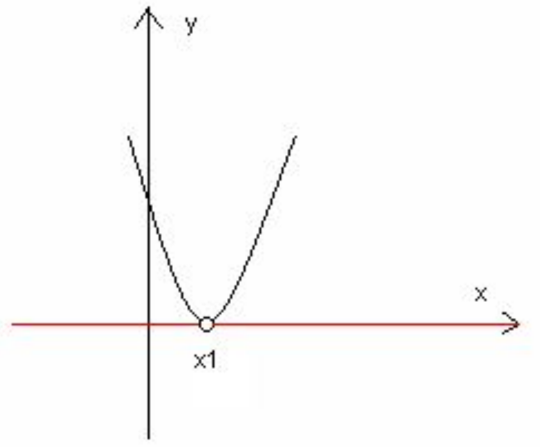


3. D=0

a>0, КВТР имеет два равных корня $x_1=x_2$

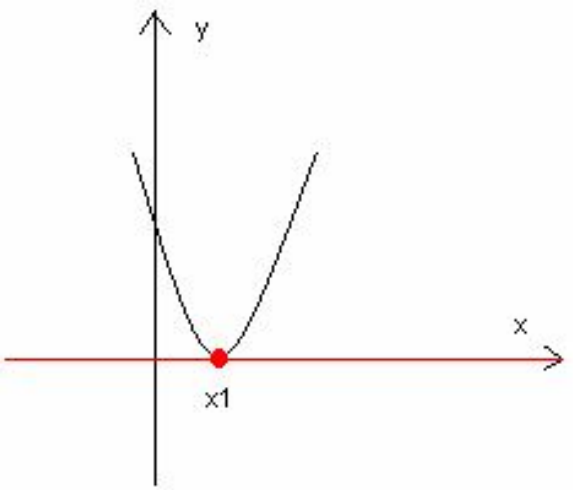
$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > x_1 \\ x < x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \neq x_1$

Ответ: $(-\infty;x_1)U(x_1;+\infty)$



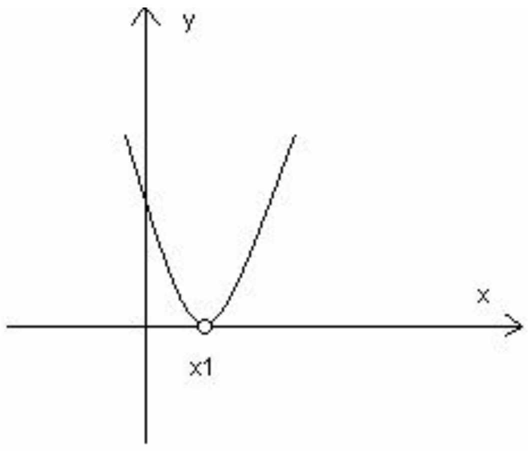
$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq x_1 \\ x \leq x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty$

Ответ: $(-\infty;+\infty)$



D=0

$a>0$, КВТР имеет два равных корня $x_1=x_2$

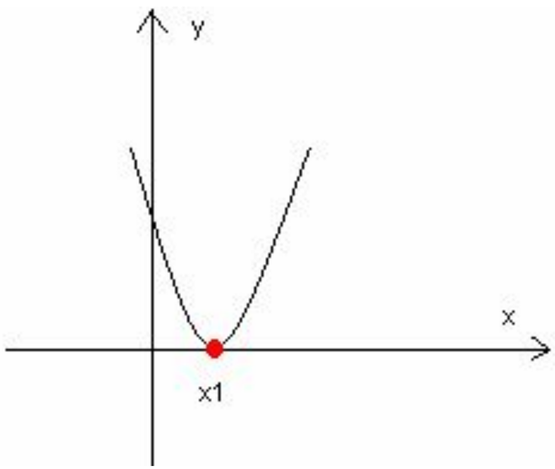


$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^2<0$

Ответ: решений нет

$ax^2+bx+c\le 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^2\le 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^2=0 \Leftrightarrow x=x_1$

Ответ: x_1



Примеры

Пример 1.

$16-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-16 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

Ответ: [-4;4]

Пример 2.

$5x^2+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 5(x+1)(x-\frac{3}{5}) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq \frac{3}{5}. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-1] \cup [\frac{3}{5};+\infty)$

Пример 3.

$7x-x^2<0 \Leftrightarrow x^2-7x>0 \Leftrightarrow x(x-7)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 7, \\ x < 0. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;0) \cup (7;+\infty)$

Пример 4.

$x^2+x+7<0$

Т. к. $D=1-28=-27$, то $x^2+x+7>0$ $\forall x \in R$

Ответ: решений нет

Пример 5.

$x^2-8x+7<0 \Leftrightarrow (x-1)(x+7)<0 \Leftrightarrow -7<x<1$

Ответ: (-7;1)

Пример 6.

$x^2+4x+4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=-2$

Ответ: x=-2

Пример 7.

Найдите область определения функции

$y= \sqrt{x^2-12x+11}$

$x^2-12x+11 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-11) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 11, \\ x \leq 1. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;1] \cup [11;+\infty)$

Пример 8.

Найдите область определения функции

$y= \dfrac{x^2-9}{\sqrt{-x^2+29x-28}}$

$-x^2+29x-28>0 \Leftrightarrow x^2-29x+28<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-28)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1<x<28$

Ответ: (1;28)