Готовимся к ЕГЭ Решение задач на исследование функций с помощью производной

Подготовила учитель математики МБОУ «Обоянская СОШ №1» Демина Надежда Алексеевна

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Точки из области определения функции, в которых:
$f'(x) = 0$ или не существует,

называются **критическими точками** этой функции.

Только они могут быть точками экстремума функции. (рис. 1 и 2).

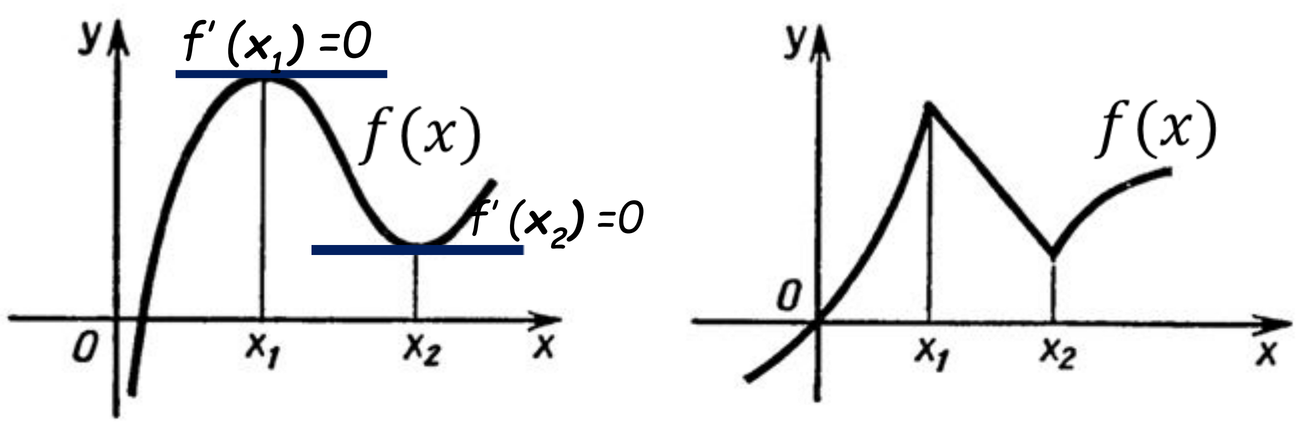


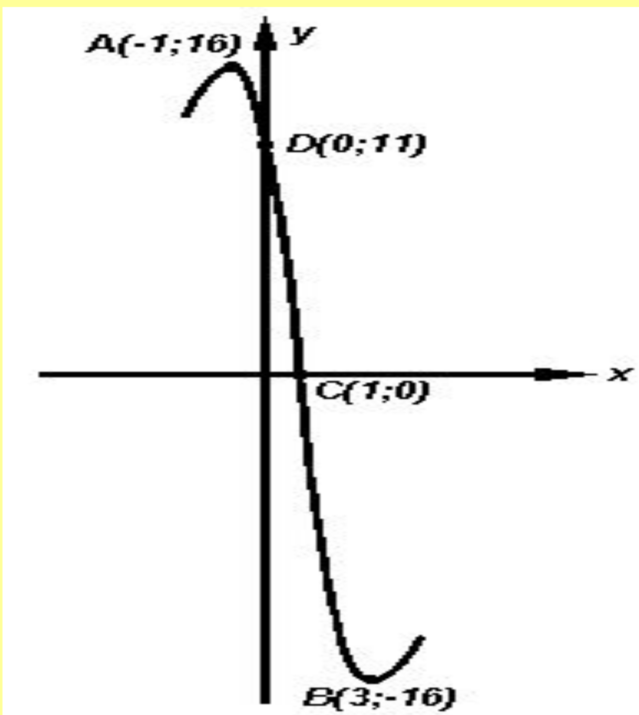
Рис. 1 Рис. 2

Точки из области определения функции, в которых:

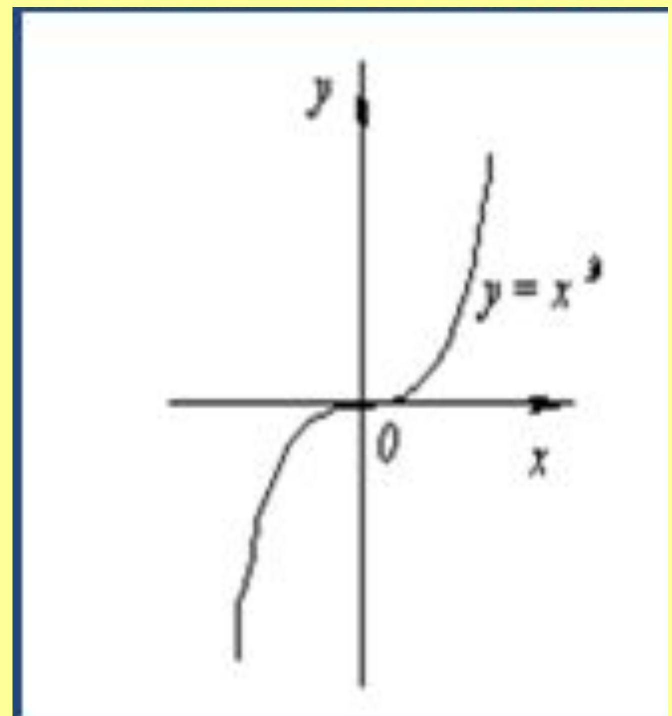
$f'(x) = 0$

называются **стационарными точками** этой функции.

Экстремумы

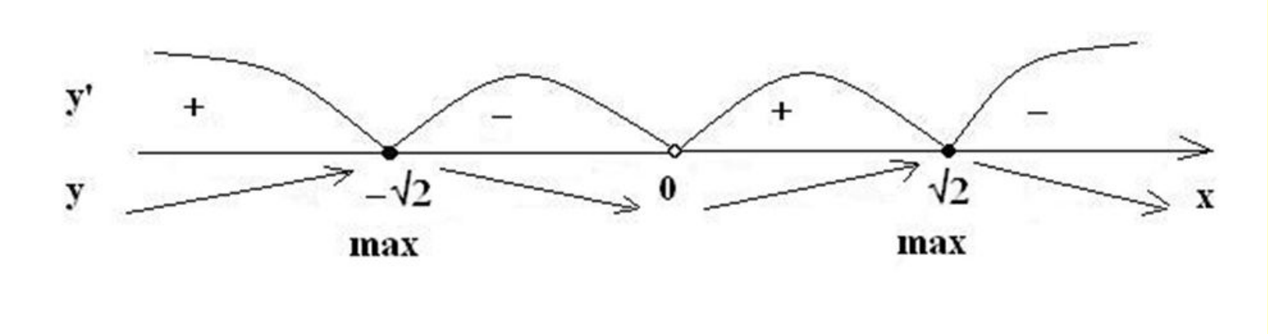


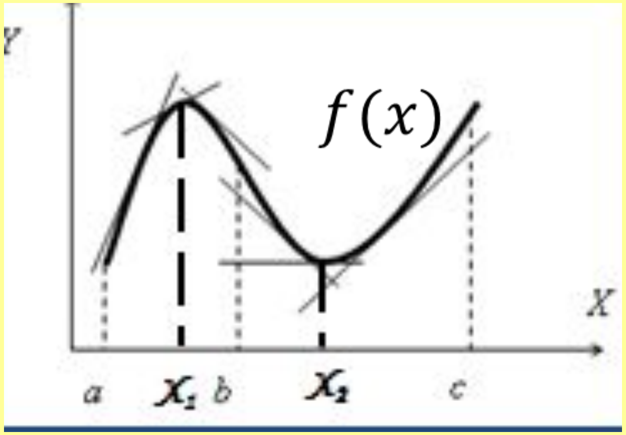
Не являются экстремумами



Пусть x_o точка из области определения функции $f(x)$ и $f'(x_o) = 0$, если производная функции меняет свой знак с «+» на «-» в точке x_o или наоборот, то эта точка

является Экстремумом.





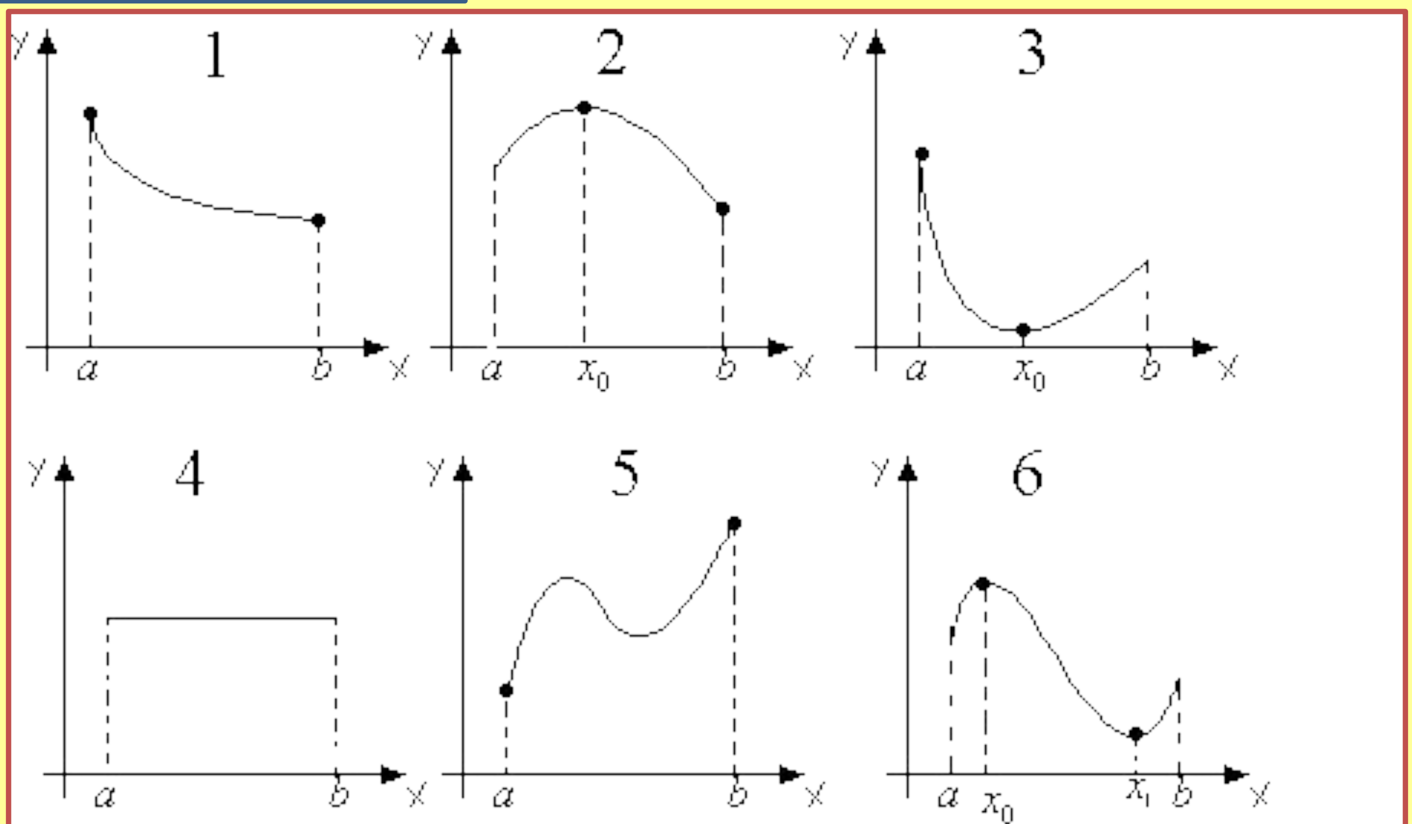
Экстремумы функции

x_0 - точка максимума (max) функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

x_0 - точка минимума (min) функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке

- Функция может достигать своих наибольших и наименьших значений либо на промежутка, либо на его



По заданным графикам функций y=f(x) укажите:
-критические точки;
-стационарные точки;
-экстремумы функции.
- Минимальное и максимальное значение на интервале [1;4]

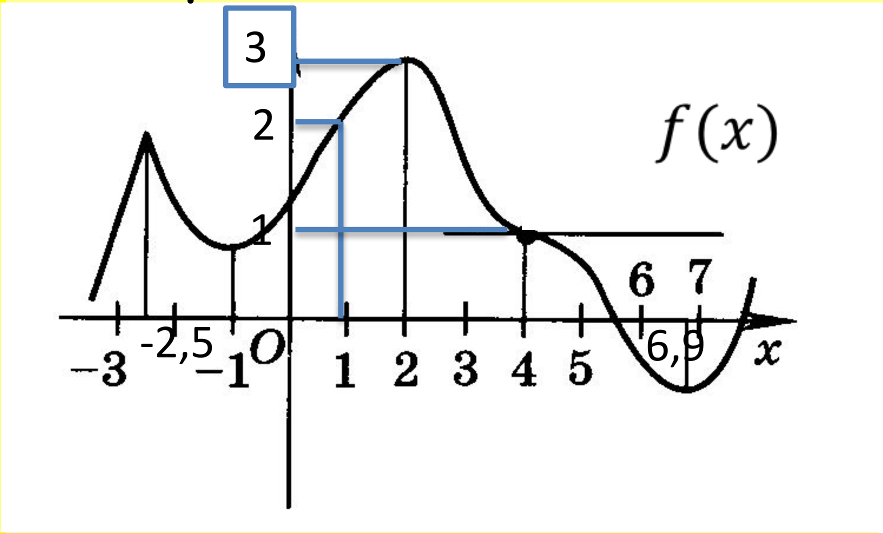
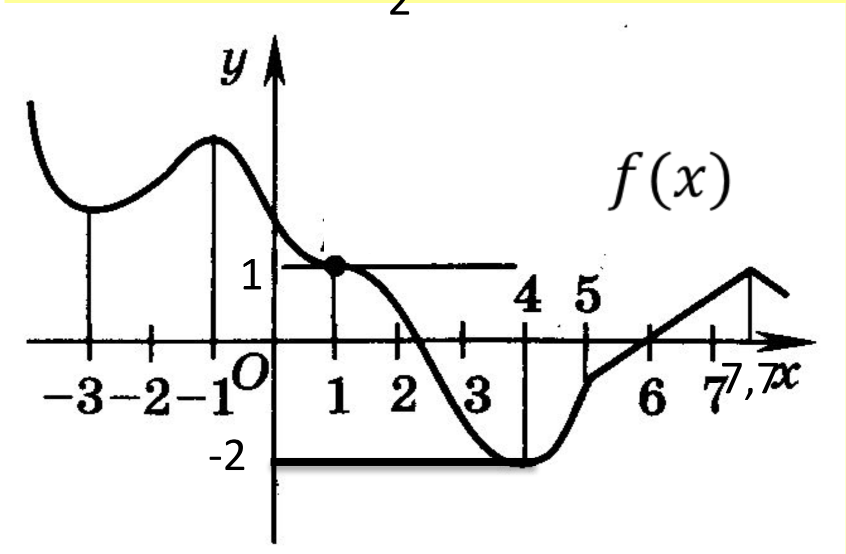


Рисунок 1

Рисунок 2



Проверь себя

	Рис.1	Рис.2
Критические точки	-2,5; -1; 2; 4; 6,9.	-3; -1; 1; 4; 7,7.
Стационарные точки	-1; 2; 4; 6,9.	-3; -1; 1; 4.
Экстремумы	2; 6,9.	-1; 4
Максимальное значение **Минимальное значение**	3 1	1 -2

Кроме того!!! На числовой прямой необходимо отмечать точки, в которых функция прерывается, т.е. дробно рациональные функции

Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{2x^2 + 242}{x} + 15$$

Решение:

1) В дроби выделим целую часть

$$y = 2x + \frac{242}{x} + 15$$

Область определения функции

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2) Находим производную функции

$$y' = 2 - \frac{242}{x^2}; \quad y' = \frac{2x^2 - 242}{x^2}$$

$$D(y') = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

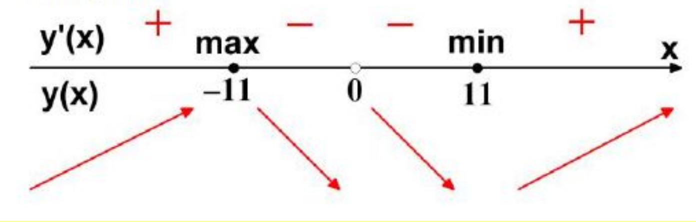
3) Решаем уравнение $y' = 0$

$$\frac{2x^2 - 242}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 242 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}; \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -11 \\ x = 11 \end{matrix}$$

Критические точки

4) Расставляем знаки производной



5) При переходе через критическую точку $x = -11$ производная меняет знак с плюса на минус следовательно в это точка максимума

Задачи на наибольшее и наименьшее значение функции на интервале.

В другом типе задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на заданном интервале.

Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции:

1. **Определяем область определения, есть ли точки максимума (минимума): находим f'(x), затем решаем f'(x) = 0 (пункты 1 и 3 из предыдущего алгоритма)**
2. **Определяем, принадлежат ли полученные точки заданному интервалу, записываем лежащие в пределах интервала.**
3. **Подставляем в исходную функцию (не в производную, а в данную в условии) концы данного интервала и точки (максимума-минимума), лежащие в пределах интервала (п.2).**
4. **Вычисляем значения функции.**
5. **Выбираем из полученных наибольшее (наименьшее) значение,**

Пример 2 Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение. (использование алгоритма). 1) $D(y)=R$.

2) $y'=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$;

$$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Критические точки функции на отрезке $[-2;2]$: -1; 1.

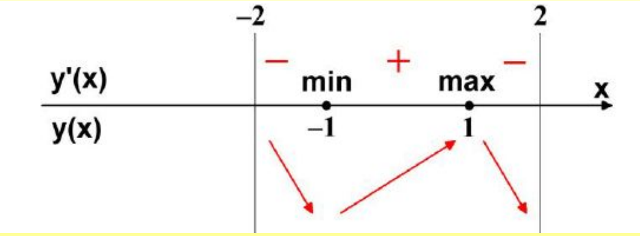
4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-2;2]$:

$$y(-1)=-1;\ y(1)=1;$$

$$y(-2)=-0{,}8;\ y(2)=0{,}8.$$

Следовательно, $\min\limits_{[-2;2]} y(x)=y(-1)=-1$.

(Корянов А.Г., Надежина Н.В. Задания В12 пр.13)



Решаем вместе

№1 (mathege.ru №77431) Найти точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$

№2 (mathege.ru №129051) Найти точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 10x$

№3 (mathege.ru №26710) Найти точку минимума функции $y=(x+16)e^{x-16}$

№4 (mathege.ru №4307) Найти точку максимума функции $y = \ln(x - 11) - 5x + 2$

№5 (mathege.ru №77492) Найти точку максимума функции

$$y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5 \text{ на промежетке } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

№6 (mathege.ru №77473) Найти наименьшее значение функции

$y = x + \frac{36}{x}$ на промежетке $[1; 9]$

№7 (mathege.ru №128505) Найти наибольшее значение функции $y = 9 + 33x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на промежетке $[1; 482]$

№8 (mathege.ru №77482) Найти наименьшее значение функции

$y = (x-2)^2 e^{x-2}$ на промежетке $[1; 4]$

Задачи для самостоятельного решения

- 1.Найдите точку максимума функции

$y = x^3 - 48x + 17$ (mathege.ru №77420)

$y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}$ (mathege.ru №77463)

$y = -\frac{x^2 + 289}{x}$ (mathege.ru №77467)

$y = (4x - 6)\cos x - 4\sin x + 10$ (mathege.ru №132083)

- 2.Найдите точку минимума функции

$y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ (mathege.ru №77428)

$y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ (mathege.ru №77459)

$y = -\frac{x^2 + 1}{x}$ (mathege.ru №77468)

$y = 4x - 4ln(x + 7) + 6$ (mathege.ru №77488)

- 3.Найдите точку минимума функции

4.2.1.(прототип 77422) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2;0]$.

4.21.1.(прототип 77474) Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[-4;-1]$.

4.39.1.(прототип 77484) Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2 e^{-3-x}$ на отрезке $[-5;-1]$.

Список и источники литературы

- www mathege.ru - Математика ЕГЭ 2014 (открытый банк заданий).
- www.alexlarin net - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ. поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
- http://eek.diaiy.i-u/ - сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.
- http:feshuepe.ru - Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ. Математика».