



ГОТОВИМСЯ к ЕГЭ

Решение задач на исследование функций с помощью производной

Подготовила учитель
математики МБОУ «Обоянская
СОШ №1» Демина Надежда
Алексеевна



ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ



Точки из области определения функции, в которых:

$$f'(x) = 0 \quad \text{или} \quad \text{не существует,}$$

называются **критическими точками** этой функции.

Только они могут быть точками экстремума функции. (рис. 1 и 2).

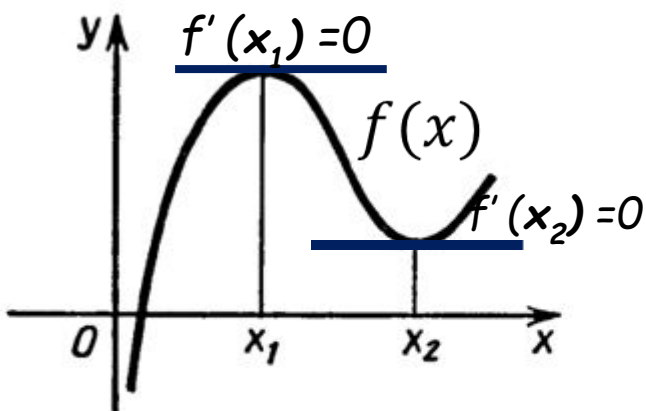


Рис. 1

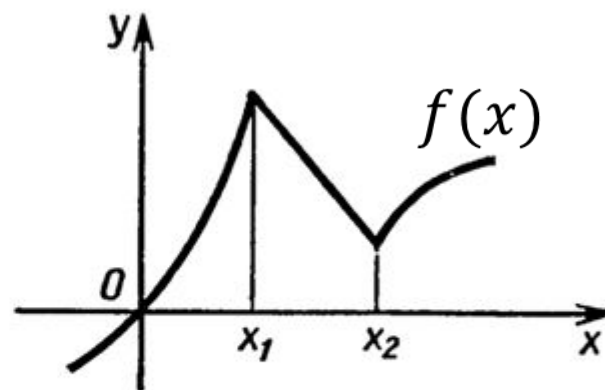


Рис. 2

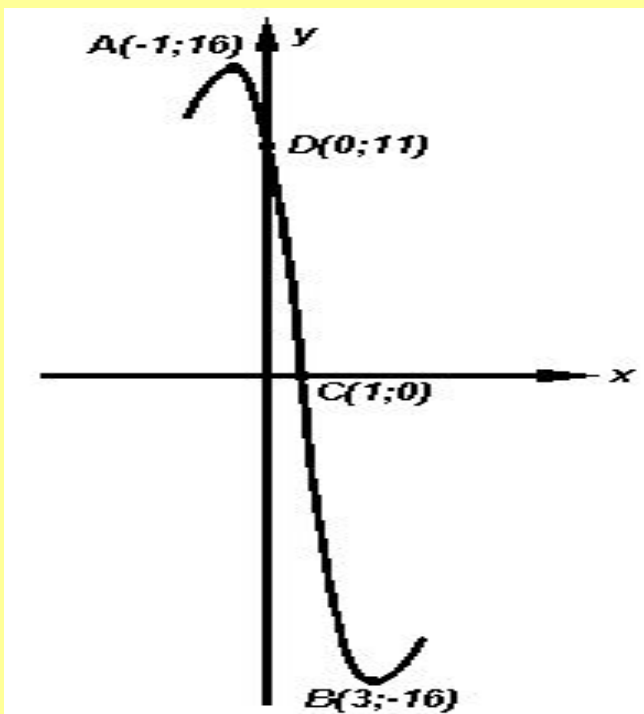


Точки из области определения функции, в которых:

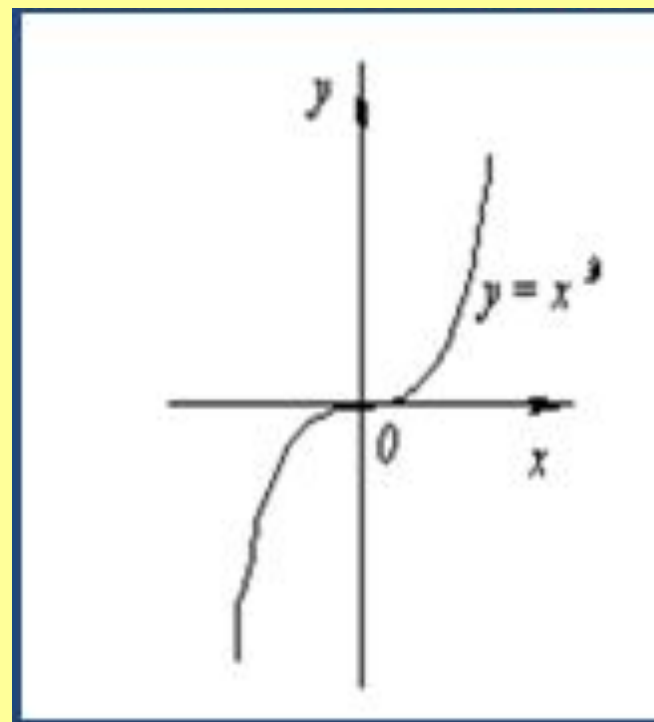
$$f'(x) = 0$$

называются **стационарными точками** этой функции.

Экстремумы



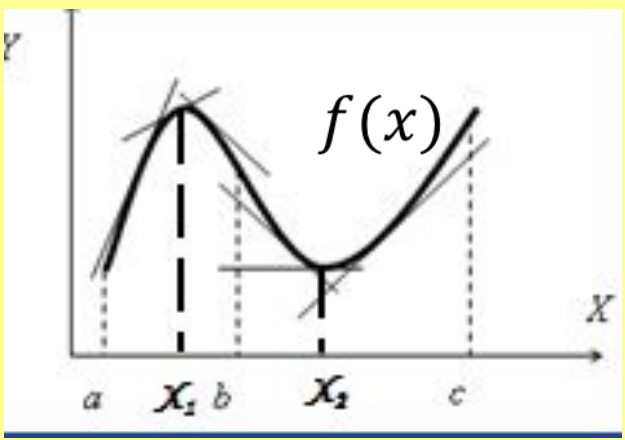
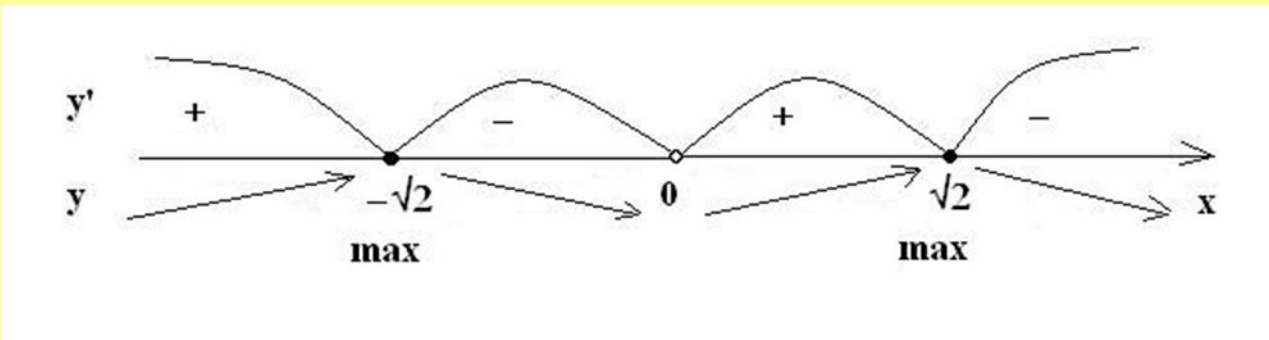
Не являются экстремумами





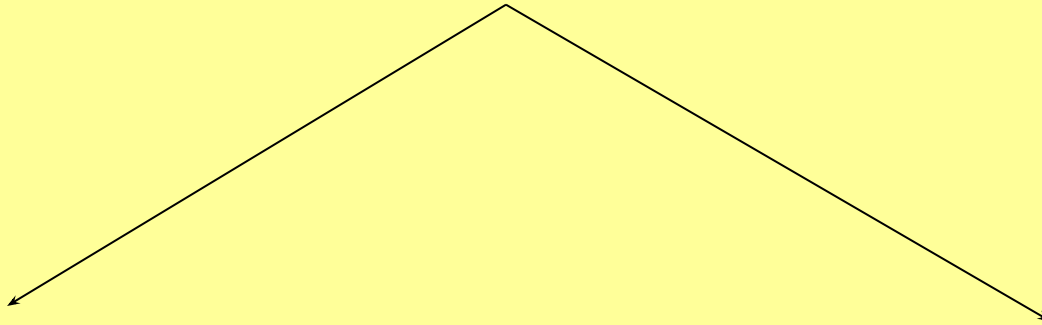
Пусть x_0 точка из области определения функции $f(x)$ и $f'(x_0) = 0$, если производная функции меняет свой знак с «+» на «-» в точке x_0 или наоборот, то эта точка

является **Экстремумом**.





Экстремумы функции



x_0 - **точка максимума** (max) функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

x_0 - **точка минимума** (min) функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



По заданным графикам функций $y=f(x)$ укажите:

- критические точки;
- стационарные точки;
- экстремумы функции.
- Минимальное и максимальное значение на интервале $[1;4]$

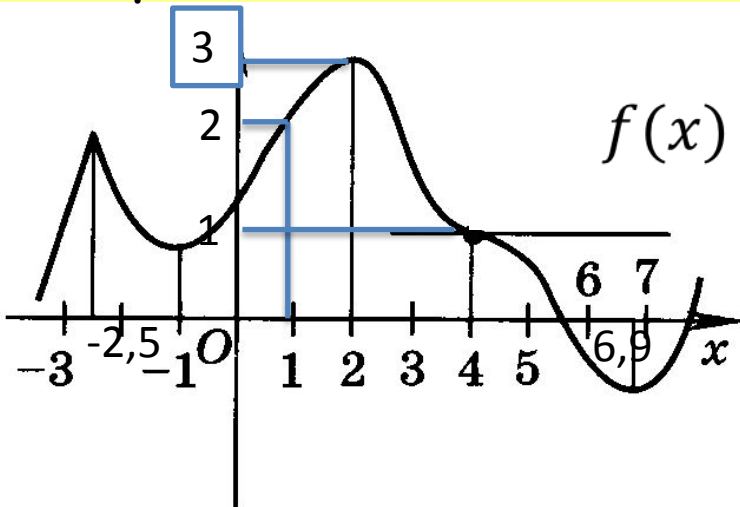
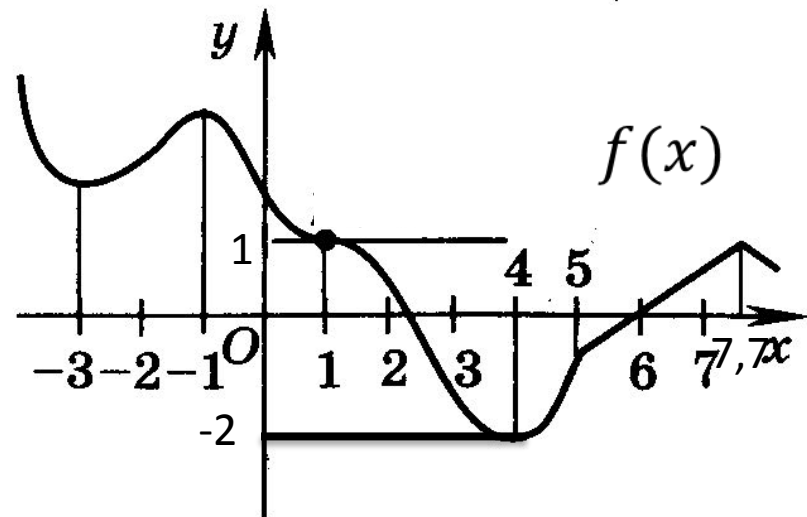


Рисунок
1

Рисунок
2





Проверь себя

	Рис.1	Рис.2
Критические точки	-2,5; -1; 2; 4; 6,9.	-3; -1; 1; 4; 7,7.
Стационарные точки	-1; 2; 4; 6,9.	-3; -1; 1; 4.
Экстремумы	2; 6,9.	-1; 4
Максимальное значение	3	1
Минимальное значение	1	-2



Кроме того!!! На числовой прямой необходимо отмечать точки, в которых функция прерывается, т.е. дробно рациональные функции



Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{2x^2 + 242}{x} + 15$$

Решение:

1) В дроби выделим целую часть

$$y = 2x + \frac{242}{x} + 15$$

Область определения функции

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2) Находим производную функции

$$y' = 2 - \frac{242}{x^2}; \quad y' = \frac{2x^2 - 242}{x^2}$$

$$D(y') = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

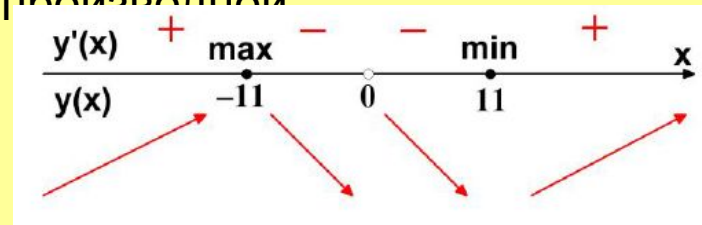
3) Решаем уравнение $y' = 0$

$$\frac{2x^2 - 242}{x^2} = 0$$

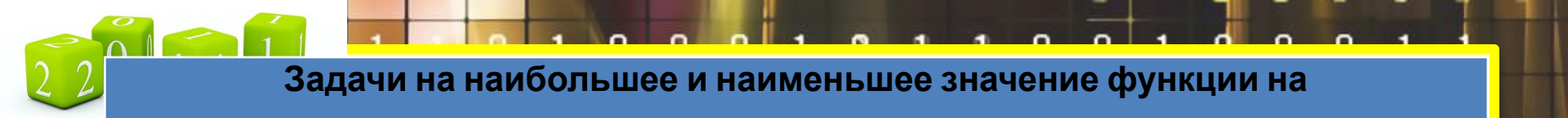
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 242 = 0; \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x = 11 \end{cases}$$

Критические точки

4) Расставляем знаки производной



5) При переходе через критическую точку $x = -11$ производная меняет знак с плюса на минус следовательно в это точка максимума




Задачи на наибольшее и наименьшее значение функции на интервале.

В другом типе задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на заданном интервале.

Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции:

1. Определяем область определения, есть ли точки максимума (минимума): находим $f'(x)$, затем решаем $f'(x) = 0$ (пункты 1 и 3 из предыдущего алгоритма)
2. Определяем, принадлежат ли полученные точки заданному интервалу, записываем лежащие в пределах интервала.
3. Подставляем в исходную функцию (не в производную, а в данную в условии) концы данного интервала и точки (максимума-минимума), лежащие в пределах интервала (п.2).
4. Вычисляем значения функции.
5. Выбираем из полученных наибольшее (наименьшее) значение,



Пример 2 Найдите наименьшее зна-

чение функции $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. (использование алгоритма). 1) $D(y) = R$.

$$2) y' = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}; D(y') = R.$$

$$3) y' = 0;$$

$$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Критические точки функции на отрезке $[-2; 2]$: $-1; 1$.

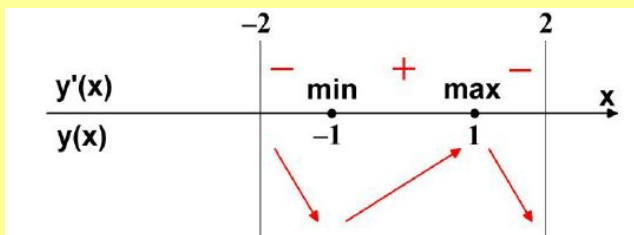
4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-2; 2]$:

$$y(-1) = -1; y(1) = 1;$$

$$y(-2) = -0,8; y(2) = 0,8.$$

Следовательно, $\min_{[-2;2]} y(x) = y(-1) = -1$.

(Корянов А.Г., Надежина Н.В. Задания В12 пр.13)





Решаем вместе

№1 (mathege.ru №77431) Найти точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$



№2 (mathege.ru №129051) Найти точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 10x$



№3 (mathege.ru №26710) Найти точку минимума функции $y = (x + 16)e^{x-16}$



№4 (mathege.ru №4307) Найти точку максимума функции $y = \ln(x - 11) - 5x + 2$



№5 (mathege.ru №77492) Найти точку максимума функции

$$y = (2x - 3) \cos x - 2 \sin x + 5 \text{ на промежете } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$



№6 (mathege.ru №77473) Найти наименьшее значение функции

$$y = x + \frac{36}{x} \text{ на промежете } [1; 9]$$



№7 (mathege.ru №128505) Найти наибольшее значение функции $y = 9 + 33x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на промежутке $[1; 482]$



№8 (mathege.ru №77482) Найти наименьшее значение функции
 $y = (x - 2)^2 e^{x-2}$ на промежутке $[1; 4]$



Задачи для самостоятельного решения

- 1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17 \quad (\text{mathege.ru №77420})$$

$$y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x} \quad (\text{mathege.ru №77463})$$

$$y = -\frac{x^2 + 289}{x} \quad (\text{mathege.ru №77467})$$

$$y = (4x - 6) \cos x - 4 \sin x + 10 \quad (\text{mathege.ru №132083})$$

- 2. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 3 \quad (\text{mathege.ru №77428})$$

$$y = x\sqrt{x} - 3x + 1 \quad (\text{mathege.ru №77459})$$

$$y = -\frac{x^2 + 1}{x} \quad (\text{mathege.ru №77468})$$

$$y = 4x - 4 \ln(x + 7) + 6 \quad (\text{mathege.ru №77488})$$

- 3. Найдите точку минимума функции

4.2.1.(прототип 77422) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$.

4.21.1.(прототип 77474) Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

4.39.1.(прототип 77484) Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2 e^{-3-x}$ на отрезке $[-5; -1]$.



Список и источники литературы

- www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2014 (открытый банк заданий).
- www.alexlarin.net - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ. поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
- <http://eek.diaiy.i-u/> - сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.
- <http://feshuepe.ru> - Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ. Математика».