

Алгебра и начала математического анализа

11 класс

Дифференцирование  
показательной и  
логарифмической функции

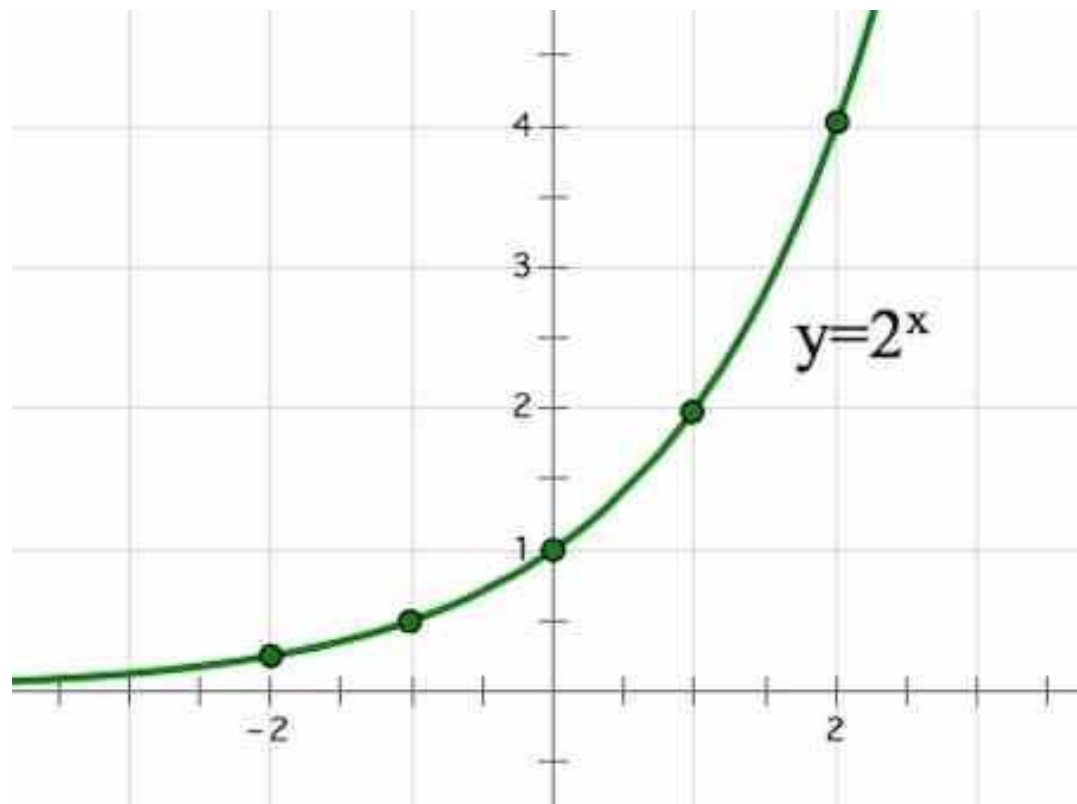


Число  $e$ . Функция  $y = e^x$ , её  
свойства, график,  
дифференцирование

Рассмотрим показательную функцию  $y = a^x$ , где  $a > 1$ .

Построим для различных оснований  $a$  графики:

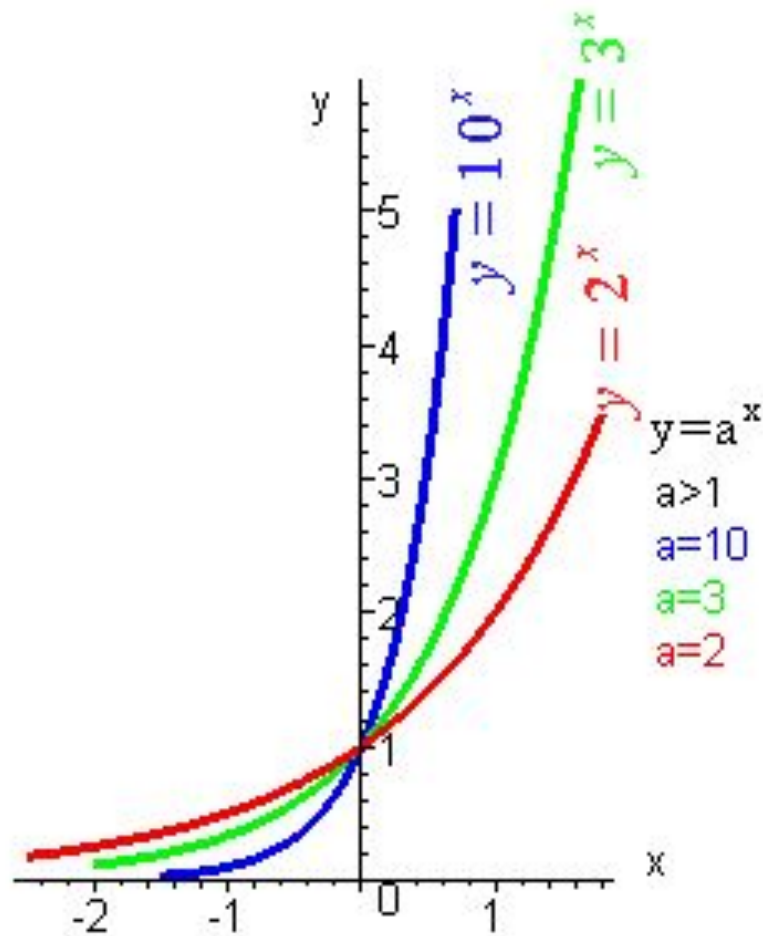
1.  $y = 2^x$



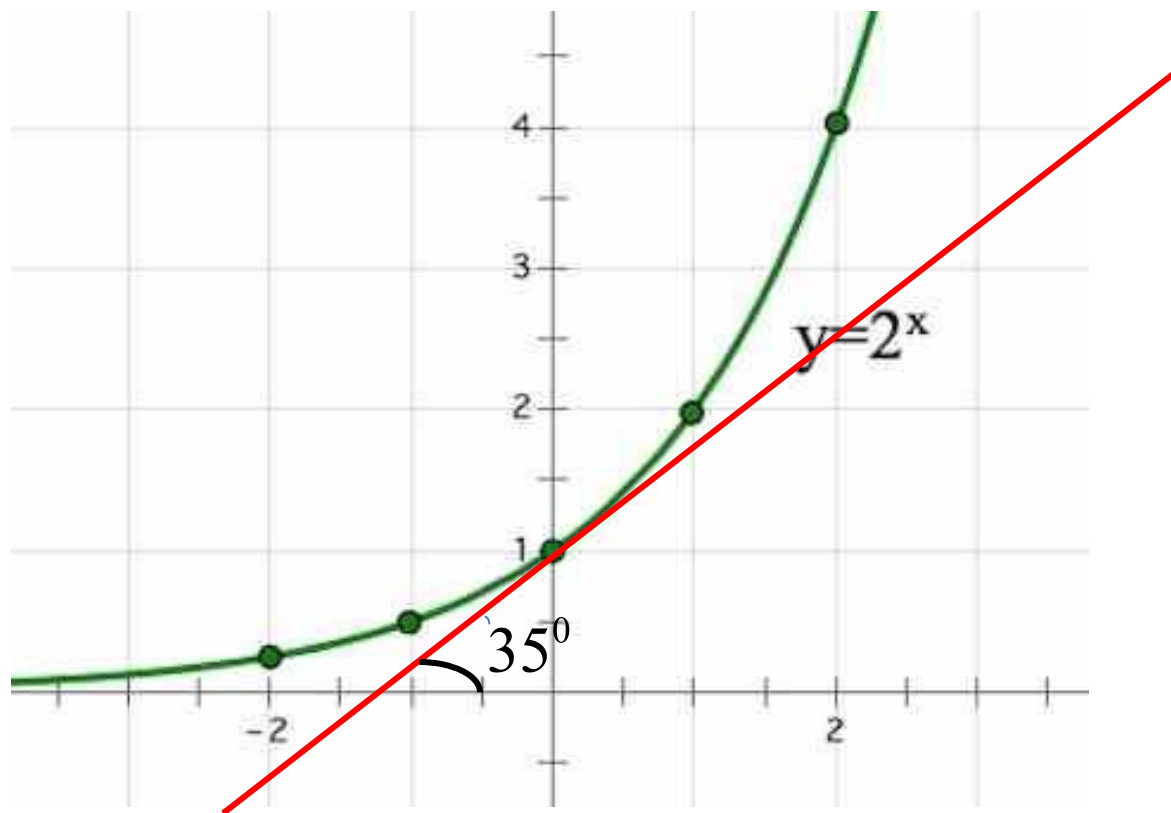
2.  $y = 3^x$  (1 вариант)

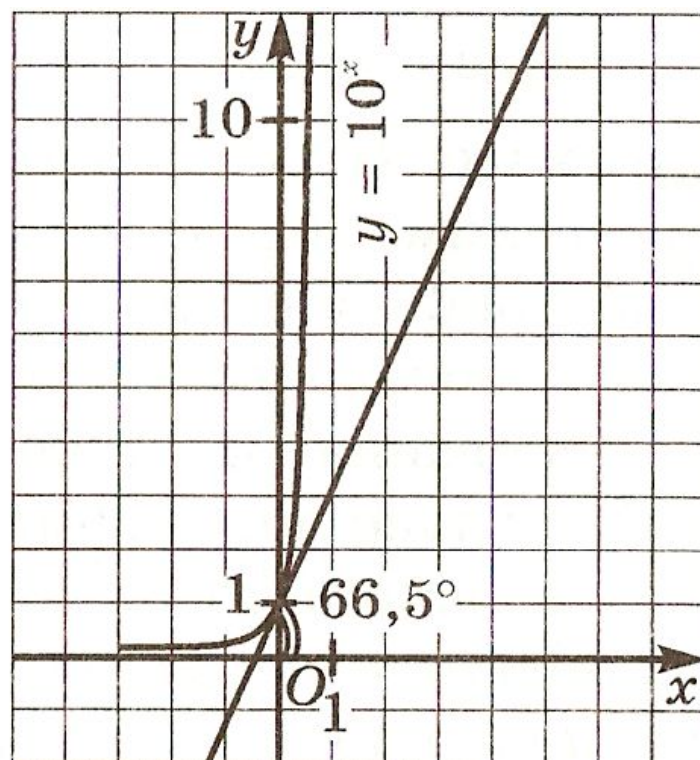
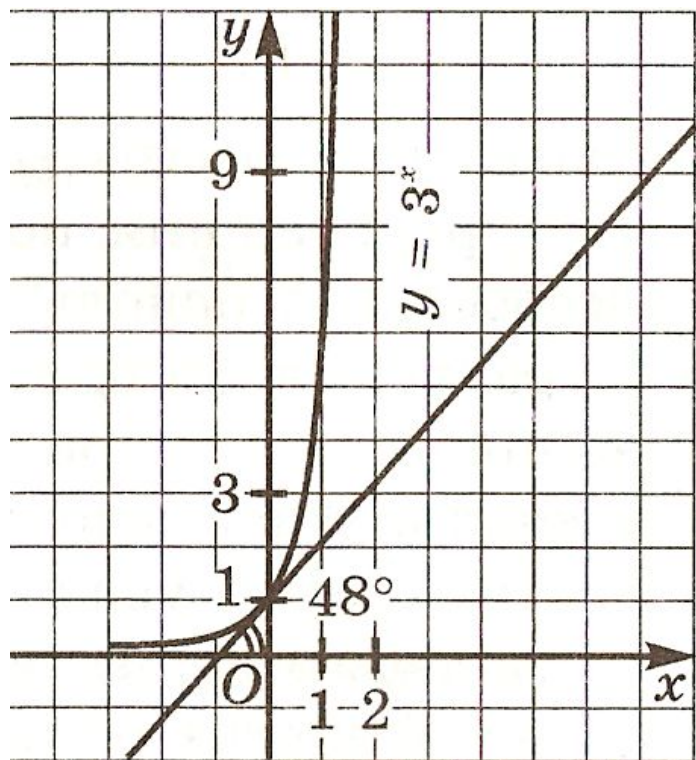
3.  $y = 10^x$  (2 вариант)

- 1) Все графики проходят через точку  $(0 ; 1)$ ;
- 2) Все графики имеют горизонтальную асимптоту  $y = 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ;
- 3) Все они обращены выпуклостью вниз;
- 4) Все они имеют касательные во всех своих точках.



Проведем касательную к графику функции  $y = 2^x$  в точке  $x = 0$  и измерим угол, который образует касательная с осью  $x$





С помощью точных построений касательных к графикам можно заметить, что если основание  $a$  показательной функции  $y = a^x$  постепенно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке  $x = 0$  и осью абсцисс постепенно увеличивается от  $35'$  до  $66,5'$ .

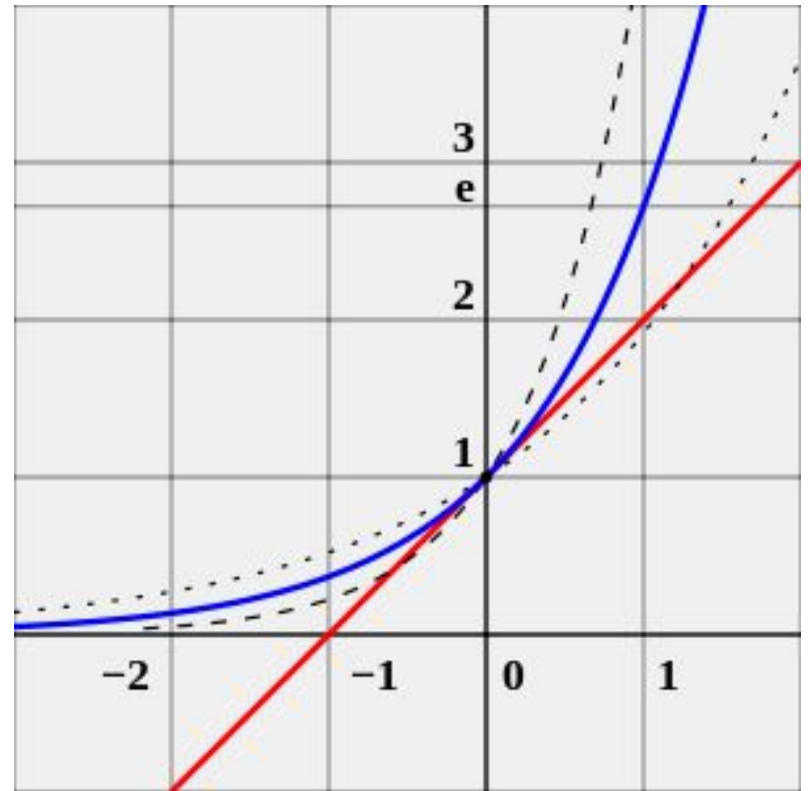
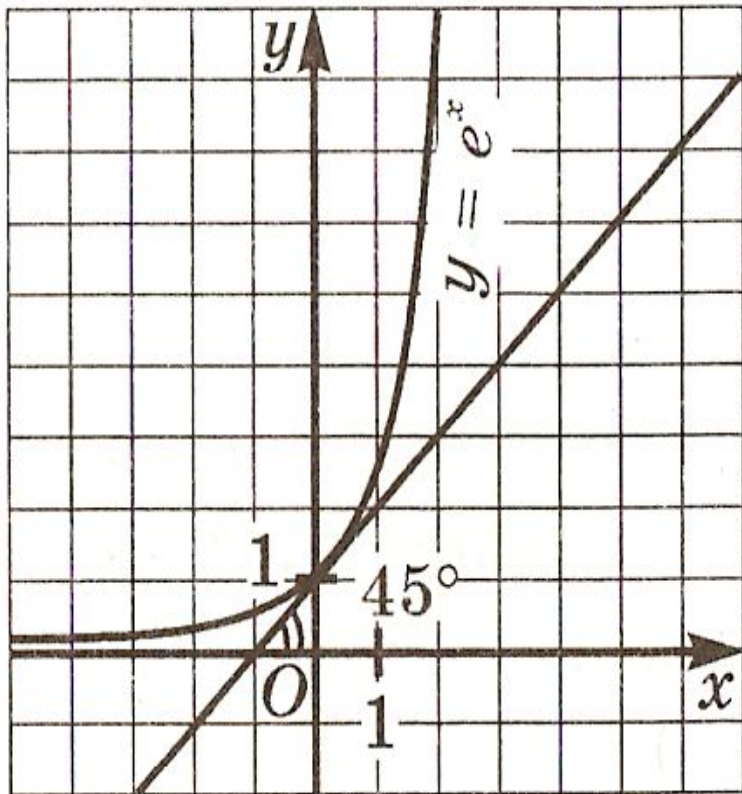
Следовательно существует основание  $a$ , для которого соответствующий угол равен  $45'$ . И это значение  $a$  заключено между 2 и 3, т.к. при  $a = 2$  угол равен  $35'$ , при  $a = 3$  он равен  $48'$ .

**В курсе математического анализа доказано, что данное основание существует, его принято обозначать буквой  $e$ .**

Установлено, что  $e$  – иррациональное число, т. е. представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь:

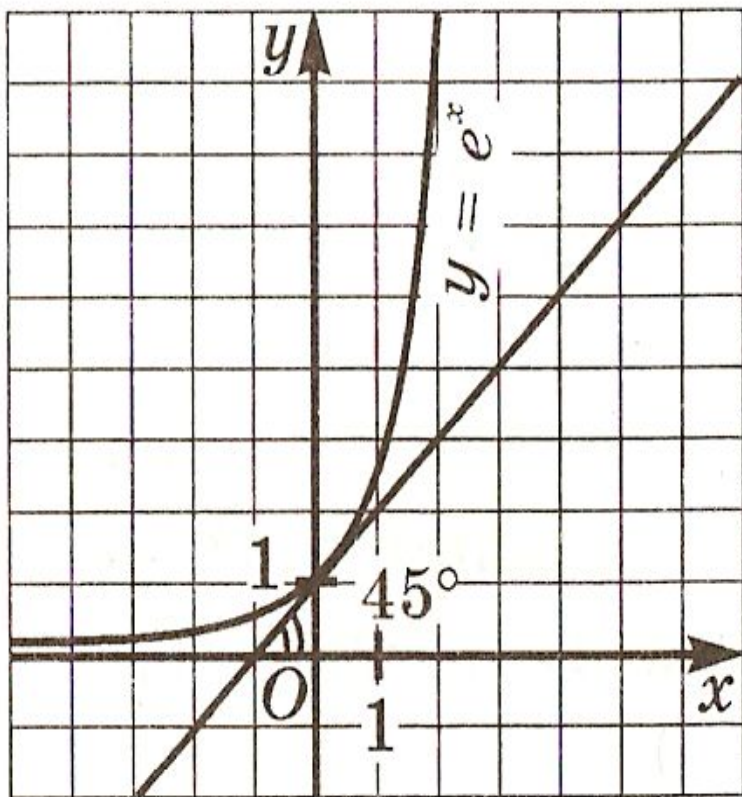
$$e = 2, 7182818284590\dots ;$$

На практике обычно полагают, что  $e \approx 2,7$ .





# График и свойства функции $y = e^x$ :



- 1)  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ;
- 2) не является ни четной, ни нечетной;
- 3) возрастает;
- 4) не ограничена сверху, ограничена снизу
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
- 6) непрерывна;
- 7)  $E(f) = (0; +\infty)$ ;
- 8) выпукла вниз;
- 9) дифференцируема.

Функцию  $y = e^x$  называют **экспонентой**.

В курсе математического анализа доказано, что функция  $y = e^x$  имеет производную в любой точке  $x$ :

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{5x})' = 5e^{5x}$$

$$(e^{x-3})' = e^{x-3}$$

$$(e^{-4x+1})' = -4e^{-4x+1}$$

### Пример 1.

Вычислить значение производной функции  $y = e^{4x-12}$  в точке  $x = 3$ .

Решение:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

$$y'(3) = (e^{4 \cdot 3 - 12})' = 4e^0 = 4$$

Ответ: 4

## Пример 2.

Исследовать на экстремум функцию  $y = x^2 e^x$

Решение:

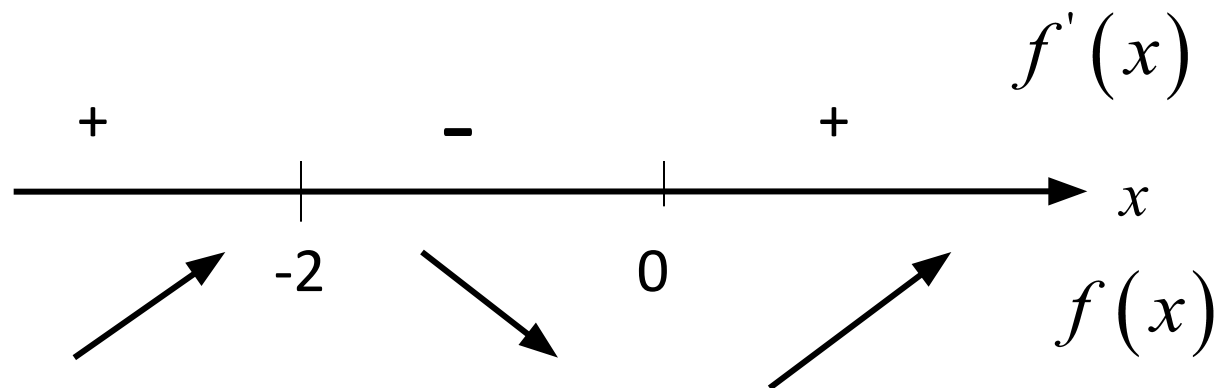
$$\begin{aligned} 1) \quad y' &= (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = \\ &= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x (x + 2); \end{aligned}$$

$$2) \quad y' = 0; \quad \text{или } x=0 \quad (x + 2) = 0;$$

$$xe^x (x + 2) = 0;$$

$$x=0 \quad \text{и} \quad x=-2$$

$$3) y' = xe^x(x+2);$$



4)  $x = -2$  – точка максимума

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$$

$x = 0$  – точка минимума

$$y_{\min} = (0)^2 e^0 = 0$$

Ответ:  $y_{\min} = 0; \quad y_{\max} = \frac{4}{e^2}.$

Натуральные логарифмы.

Функция  $y = \ln x$ , её свойства,  
график, дифференцирование

Если основанием логарифма служит число  $e$ , то говорят, что задан **натуральный логарифм**. Для натуральных логарифмов введено специальное обозначение  **$\ln$**  ( $l$  – логарифм,  $n$  – натуральный).

$$\ln x = \log_e x$$

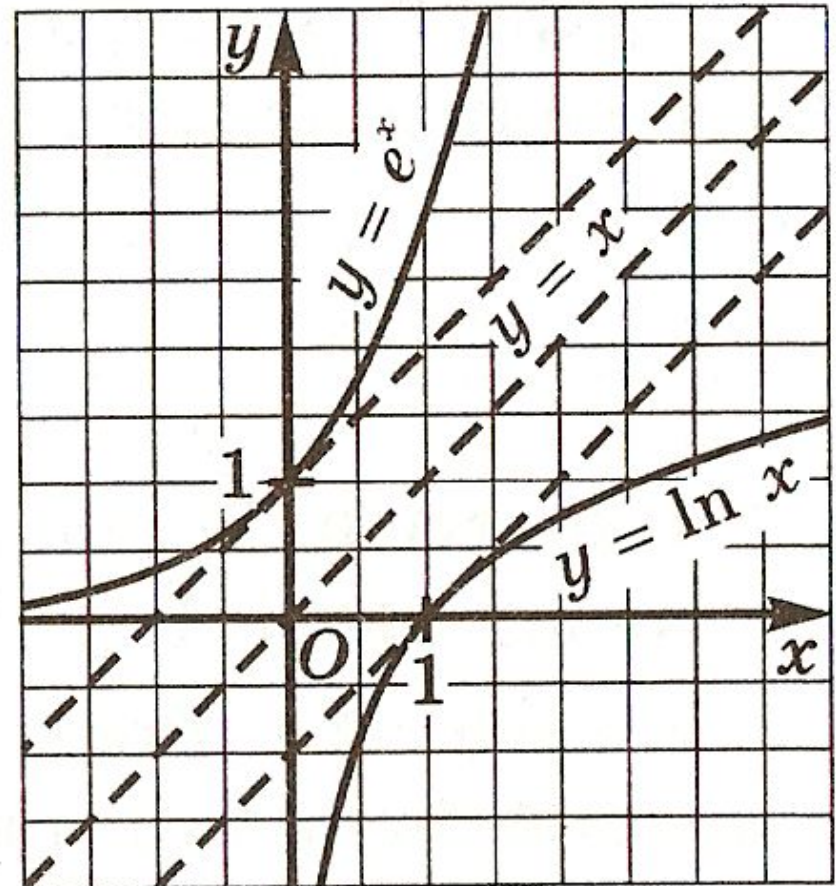
$$\log_e 2 = \ln 2$$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

# График и свойства функции $y = \ln x$

Свойства функции  $y = \ln x$ :

- 1)  $D(f) = (0; +\infty)$ ;
- 2) не является ни четной, ни нечетной;
- 3) возрастает на  $(0; +\infty)$ ;
- 4) не ограничена;
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7)  $E(f) = (-\infty; +\infty)$ ;
- 8) выпукла вверх;
- 9) дифференцируема.





В курсе математического анализа доказано, что для любого значения  $x > 0$  справедлива формула дифференцирования

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

### Пример 3:

Вычислить значение производной функции  $y = \ln(3x + 5)$  в точке  $x = -1$ .

Решение:

$$y' = \left( \ln(3x + 5) \right)' = 3 \cdot \frac{1}{3x + 5} = \frac{3}{3x + 5};$$

$$f'(-1) = \frac{3}{3 \cdot (-1) + 5} = 1,5.$$

Ответ: 1,5

## Дифференцирование функции

$$y = a^x$$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например:  $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$ ;  $(4^{x+5})' = 4^{x+5} \cdot \ln 4$ .

$$(5^{-3x})' = -3 \cdot 5^{-3x} \cdot \ln 5.$$

## Дифференцирование функции

$$y = \log_a x$$

$$y' = (\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$