«Функциональные методы решения уравнений и неравенств»

Учитель математики

ГУО «Гожская средняя школа»

Бержинская Нина Леонтьевна

Обоснование актуальности темы:

Один из основных критериев обученности сегодня — это результаты ЦТ. Но для того, чтобы успешно справиться с заданиями, предлагающимися на ЦТ, школьной программы недостаточно. Необходимы дополнительные материалы. Именно поэтому было проведено исследование по теме «Функциональные методы решения уравнений и неравенств».

Цель:

изучение функциональных методов решения уравнений и неравенств

Задачи:

- повторить свойства функций, изучаемых в курсе математики;
- описать суть каждого свойства, дать рекомендации по его использованию, указания к применению;
- провести некоторую классификацию нестандартных уравнений (неравенств) по использованию общих свойств функций.

Использование понятия области определения функции

- Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x, при которых функция имеет смысл.
- Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$- элементарные функции, определенные на множествах D_1, D_2. Тогда областью определения уравнения будет множество, состоящее из тех значений x, которые принадлежат обоим множествам, то есть $D = D_1 \cap D_2$. Ясно, что когда множество D пустое ($D=\varnothing$), то уравнение решений не имеет.

Решить уравнение

$$\sqrt{x-7}-\sqrt[4]{1-2x}=23x-18.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-7\ge 0, \\ 1-2x\ge 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 7, \\ x\le \frac{1}{2}. \end{cases}$

Так как полученная система решений не имеет, то область определения уравнения не содержит ни одного числа. Значит данное уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)=0$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-4x+3\geq 0, \\ x>0, \\ 8x-2x^2-6\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty), \\ x>0 \\ 1\leq x\leq 3 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$

Проверка: x = 1, 0=0

x = 3 - неверное равенство

Ответ: 1.

Использование ограниченности функций

- Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной y при допустимых значениях переменной x.
- Функция $y = f(x)$ называют ограниченной снизу (соответственно сверху) на множестве X, если существует такое число M, что на X выполняется неравенство $f(x) \geq M$ (соответственно $f(x) \leq M$).
- Число M называется мажорантой данной функции.
- Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$ и существует такое число M, что для любого *x* из области определения $f(x)$ и $g(x)$ имеем: $g(x) \geq M$ и $f(x) \leq M$, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе:

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

Решить уравнение
sin x+sin 9x=2.

Решение. $|\sin x| \le 1$ $|\sin 9x| \le 1$

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z$

Решить уравнение

$$\sin \pi x = x^2 - x + \frac{5}{4}$$

Решение. Выделим полный квадрат в правой части уравнения, т.е. $x^2 - x + \frac{5}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + 1 \geq 1$

Так как при этом $|\sin x| \leq 1$, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \pi x = 1, \\ x^2 - x + \frac{5}{4} = 1. \end{cases}$$

x= $\frac{1}{2}$

Ответ: x = $\frac{1}{2}$.

Использование свойств монотонности функций

- Функцию y = f(x) называют ***возрастающей*** (соответственно ***убывающей***) на множестве X, если на этом множестве при увеличении аргумента увеличиваются (соответственно уменьшаются) значения функции.

Сформулируем теоремы о корне

- **Теорема 1**

  Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, а $g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $g(x) = f(x)$ имеет на промежутке X не более одного корня.

- **Теорема 2.**

  Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x) = C$ имеет на промежутке X не более одного корня.

Решить уравнение

$$\sqrt[10]{9-4x} = \sqrt[7]{2x-3}$$

Решение. ОДЗ: $x \le 2{,}25$.

Так как $f(x)= \sqrt[10]{9-4x}$ - убывающая функция,

а $g(x)= \sqrt[7]{2x-3}$ - возрастающая функция на области определения, то по теореме о корне уравнение имеет не более одного корня.

Подбором находим $x=2$.

Ответ: 2.

Найти значение выражения $n \cdot x_0$, где n – количество корней, x_0 - целый корень уравнения $5^{5-x} + 2 = x^3$

Решение. Рассмотрим функции f(x)= $5^{5-x} + 2$ и g(x)= x^3 .

Функция f(x) убывает на множестве действительных чисел, а функция g(x) - возрастает на множестве действительных чисел. По теореме о корне уравнение имеет не более одного корня. Найдём его подбором: x=3. Значит это единственный корень уравнения, т.е. n=1.

$n \cdot x_0$ =1•3=3.

Ответ: 3.

Спасибо за внимание!