

«Функциональные методы решения уравнений и неравенств»

**Учитель математики
ГУО «Гожская средняя школа»
Бержинская Нина Леонтьевна**



Обоснование актуальности темы:

Один из основных критериев обученности сегодня — это результаты ЦТ. Но для того, чтобы успешно справиться с заданиями, предлагающимися на ЦТ, школьной программы недостаточно. Необходимы дополнительные материалы. Именно поэтому было проведено исследование по теме «Функциональные методы решения уравнений и неравенств».



Цель:

**изучение
функциональных
методов решения
уравнений и
неравенств**



Задачи:

- повторить свойства функций, изучаемых в курсе математики;
- описать суть каждого свойства, дать рекомендации по его использованию, указания к применению;
- провести некоторую классификацию нестандартных уравнений (неравенств) по использованию общих свойств функций.



Использование понятия области определения функции

- Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x , при которых функция имеет смысл.
- Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ -элементарные функции, определенные на множествах D_1, D_2 . Тогда областью определения уравнения будет множество, состоящее из тех значений x , которые принадлежат обоим множествам, то есть $D = D_1 \cap D_2$. Ясно, что когда множество D пустое ($D = \emptyset$), то уравнение решений не имеет.

Решить уравнение

$$\sqrt{x-7} - \sqrt[4]{1-2x} = 23x - 18.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-7 \geq 0, \\ 1-2x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \geq 7, \\ x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Так как полученная система решений не имеет, то область определения уравнения не содержит ни одного числа. Значит данное уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) = 0$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ x > 0, \\ 8x - 2x^2 - 6 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; \infty), \\ x > 0 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Проверка: $x = 1, 0=0$

$x = 3$ - неверное равенство

Ответ: 1.

Использование ограниченности функций

- Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной y при допустимых значениях переменной x .
- Функция $y = f(x)$ называют ограниченной снизу (соответственно сверху) на множестве X , если существует такое число M , что на X выполняется неравенство $f(x) \geq M$ (соответственно $f(x) \leq M$).
- Число M называется мажорантой данной функции.
- Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$ и существует такое число M , что для любого x из области определения $f(x)$ и $g(x)$ имеем: $g(x) \geq M$ и $f(x) \leq M$, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе:

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$



Решить уравнение
 $\sin x + \sin 9x = 2$.

Решение. $|\sin x| \leq 1$ $|\sin 9x| \leq 1$

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решить уравнение

$$\sin \pi x = x^2 - x + \frac{5}{4}$$

Решение. Выделим полный квадрат в правой части уравнения, т.е.

$$x^2 - x + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1$$

Так как при этом $|\sin x| \leq 1$, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \pi x = 1, \\ x^2 - x + \frac{5}{4} = 1. \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.



Использование свойств монотонности функций

- Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** (соответственно **убывающей**) на множестве X , если на этом множестве при увеличении аргумента увеличиваются (соответственно уменьшаются) значения функции.



Сформулируем теоремы о корне

- **Теорема 1**

Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X , а $g(x)$ убывает на промежутке X , то уравнение $g(x) = f(x)$ имеет на промежутке X не более одного корня.

- **Теорема 2.**

Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X , то уравнение $f(x) = C$ имеет на промежутке X не более одного корня.

Решить уравнение

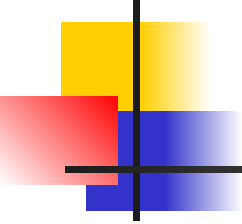
$$\sqrt[10]{9 - 4x} = \sqrt[7]{2x - 3}$$

Решение. ОДЗ: $x \leq 2,25$.

Так как $f(x) = \sqrt[10]{9 - 4x}$ - убывающая функция, а $g(x) = \sqrt[7]{2x - 3}$ - возрастающая функция на области определения, то по теореме о корне уравнение имеет не более одного корня.

Подбором находим $x=2$.

Ответ: 2.



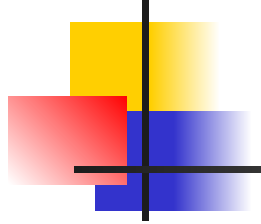
Найти значение выражения $n \cdot x_0$, где n – количество корней, x_0 – целый корень уравнения $5^{5-x} + 2 = x^3$

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = 5^{5-x} + 2$ и $g(x) = x^3$.

Функция $f(x)$ убывает на множестве действительных чисел, а функция $g(x)$ – возрастает на множестве действительных чисел. По теореме о корне уравнение имеет не более одного корня. Найдём его подбором: $x=3$. Значит это единственный корень уравнения, т.е. $n=1$.

$$n \cdot x_0 = 1 \cdot 3 = 3.$$

Ответ: 3.



Спасибо за
внимание!