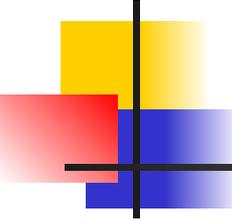




# «Функциональные методы решения уравнений и неравенств»

**Учитель математики  
ГУО «Гожская средняя школа»  
Бержинская Нина Леонтьевна**



## Обоснование актуальности темы:

---

Один из основных критериев обученности сегодня — это результаты ЦТ. Но для того, чтобы успешно справиться с заданиями, предлагающимися на ЦТ, школьной программы недостаточно. Необходимы дополнительные материалы. Именно поэтому было проведено исследование по теме «Функциональные методы решения уравнений и неравенств».



Цель:

---

**изучение  
функциональных  
методов решения  
уравнений и  
неравенств**



# Задачи:

---

- повторить свойства функций, изучаемых в курсе математики;
- описать суть каждого свойства, дать рекомендации по его использованию, указания к применению;
- провести некоторую классификацию нестандартных уравнений (неравенств) по использованию общих свойств функций.



## Использование понятия области определения функции

---

- Областью определения функции  $y = f(x)$  называется множество значений переменной  $x$ , при которых функция имеет смысл.
- Пусть дано уравнение  $f(x) = g(x)$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$ -элементарные функции, определенные на множествах  $D_1, D_2$ . Тогда областью определения уравнения будет множество, состоящее из тех значений  $x$ , которые принадлежат обоим множествам, то есть  $D = D_1 \cap D_2$ . Ясно, что когда множество  $D$  пустое ( $D = \emptyset$ ), то уравнение решений не имеет.

Решить уравнение

$$\sqrt{x-7} - \sqrt[4]{1-2x} = 23x - 18.$$

Решение. ОДЗ:  $\begin{cases} x-7 \geq 0, \\ 1-2x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \geq 7, \\ x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Так как полученная система решений не имеет, то область определения уравнения не содержит ни одного числа. Значит данное уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) = 0$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ x > 0, \\ 8x - 2x^2 - 6 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; \infty), \\ x > 0 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Проверка:  $x = 1, 0=0$

$x = 3$  - неверное равенство

Ответ: 1.

# Использование ограниченности функций

- Областью значений функции  $y = f(x)$  называется множество значений переменной  $y$  при допустимых значениях переменной  $x$ .
- Функция  $y = f(x)$  называют ограниченной снизу (соответственно сверху) на множестве  $X$ , если существует такое число  $M$ , что на  $X$  выполняется неравенство  $f(x) \geq M$  (соответственно  $f(x) \leq M$ ).
- Число  $M$  называется мажорантой данной функции.
- Пусть мы имеем уравнение  $f(x) = g(x)$  и существует такое число  $M$ , что для любого  $x$  из области определения  $f(x)$  и  $g(x)$  имеем:  $g(x) \geq M$  и  $f(x) \leq M$ , тогда уравнение  $f(x) = g(x)$  эквивалентно системе:

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$



Решить уравнение  
 $\sin x + \sin 9x = 2$ .

---

Решение.  $|\sin x| \leq 1$   $|\sin 9x| \leq 1$

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

# Решить уравнение

$$\sin \pi x = x^2 - x + \frac{5}{4}$$

Решение. Выделим полный квадрат в правой части уравнения, т.е.

$$x^2 - x + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1$$

Так как при этом  $|\sin x| \leq 1$ , то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \pi x = 1, \\ x^2 - x + \frac{5}{4} = 1. \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

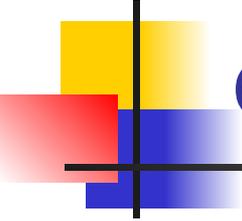
Ответ:  $x = \frac{1}{2}$ .



# Использование свойств монотонности функций

---

- Функцию  $y = f(x)$  называют **возрастающей** (соответственно **убывающей**) на множестве  $X$ , если на этом множестве при увеличении аргумента увеличиваются (соответственно уменьшаются) значения функции.



## Сформулируем теоремы о корне

---

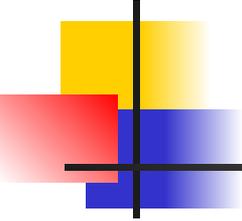
- **Теорема 1**

Если функция  $f(x)$  возрастает на промежутке  $X$ , а  $g(x)$  убывает на промежутке  $X$ , то уравнение  $g(x) = f(x)$  имеет на промежутке  $X$  не более одного корня.

- **Теорема 2.**

Если функция  $f(x)$  монотонна на промежутке  $X$ , то уравнение  $f(x) = C$  имеет на промежутке  $X$  не более одного корня.

Решить уравнение


$$\sqrt[10]{9 - 4x} = \sqrt[7]{2x - 3}$$

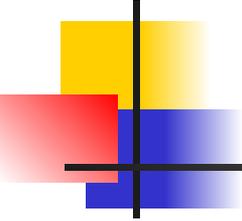
---

Решение. ОДЗ:  $x \leq 2,25$ .

Так как  $f(x) = \sqrt[10]{9 - 4x}$  - убывающая функция,  
а  $g(x) = \sqrt[7]{2x - 3}$  - возрастающая функция на  
области определения, то по теореме о корне  
уравнение имеет не более одного корня.

Подбором находим  $x=2$ .

Ответ: 2.



Найти значение выражения  $n \cdot x_0$ , где  $n$  – количество корней,  $x_0$  – целый корень уравнения  $5^{5-x} + 2 = x^3$

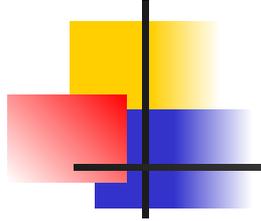
---

Решение. Рассмотрим функции  $f(x) = 5^{5-x} + 2$  и  $g(x) = x^3$ .

Функция  $f(x)$  убывает на множестве действительных чисел, а функция  $g(x)$  – возрастает на множестве действительных чисел. По теореме о корне уравнение имеет не более одного корня. Найдём его подбором:  $x=3$ . Значит это единственный корень уравнения, т.е.  $n=1$ .

$$n \cdot x_0 = 1 \cdot 3 = 3.$$

Ответ: 3.



Спасибо за  
внимание!