Метод рационализации при решении логарифмических неравенств

Задача 17

ЕГЭ 2015

Метод рационализации

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое G(x) при котором неравенство G(x)>0 равносильно неравенству F(x)>0 в области определения выражения F(x).

Идея метода рационализации состоит в использовании свойств монотонной функции.

Если p(x) возрастает на множестве М, то для любых

$$x_1, x_2 \in M,\ p(x_1) \geq p(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$

или

$$p(x_1) - p(x_2) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geq 0.$$

Если p(x) убывает на множестве М, то для любых

$$x_1, x_2 \in M,\ p(x_1) \geq p(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$$

или

$$p(x_1) - p(x_2) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \leq 0.$$

Функция $y=\log_a x$ монотонна на ОДЗ

при а > 1 возрастает, при 0 < а< 1 убывает

Рассмотрим знаки выражений

$$F(x)=\log_a f(x)-\log_a g(x);\quad f(x)-g(x);\quad G(x)=(a-1)(f(x)-g(x))$$

в зависимости от *а* и области определения F(x)

$$a>0,\ a\neq 1,\ f(x)>0,\ g(x)>0$$

а	$\log_a f(x)-\log_a g(x);$	$f(x)-g(x);$	$(a-1)(f(x)-g(x))$
a > 1	+	+	+
a > 1	-	-	-
0 < *a* < 1	+	-	+
0 < *a* < 1	-	+	-

Выражения F(x) и G(x) при всех допустимых x имеют

ТЕОРЕМА:

При $a>0, a\neq 1, f(x)>0, g(x)>0$ **знаки выражений**

$F(x)=\log_a f(x)-\log_a g(x)$ **и** $G(x)=(a-1)(f(x)-g(x))$

совпадают.

Рационализация выражений

$a)\log_a f(x)+\log_a g(x)\geq 0,\ ОДЗ: a>0, a\neq 1, f(x)>0, g(x)>0$

$\log_a(f(x)\cdot g(x))\geq 0,$

$\log_a(f(x)\cdot g(x))-0\geq 0,$

$\log_a(f(x)\cdot g(x))-\log_a 1\geq 0,$ неравенство вида $F(x)\geq 0, где$ $F(x)=\log_a f(x)-\log_a g(x)$

$(a-1)(f(x)\cdot g(x)-1)\geq 0.$

Рационализация логарифмических выражения:

ТЕОРЕМА

При $a>0, a\neq 1, f(x)>0, g(x)>0$ **знаки выражений** $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ **и** $(a-1)(f(x)-g(x))$ **совпадают.**

Стандартные ошибки при использовании метода рационализации:

- проводят рационализацию без учёта области определения данного неравенства;
- применяют метод рационализации к неравенствам, не приведённым к стандартному виду F(x) > 0, $F(x)=\log_a f(x)-\log_a g(x)$
- формально применяют метод рационализации к выражению вида $\log_a f(x)+\log_a g(x)$, заменяя на выражение $f(x)+g(x)$.
- подменяют формулировку «о совпадении знаков выражений для каждого допустимого x» на неверную формулировку « о

Рационализация выражений

$$б)\log_a f(x)\cdot\log_b g(x)\geq 0,$$

$$ОДЗ: a\rangle 0, a\neq 1, b\rangle 0, b\neq 1,$$
$$f(x)\rangle 0, g(x)\rangle 0$$

$$(\log_a f(x)-0)\cdot(\log_b g(x)-0)\geq 0,$$

$$(\log_a f(x)-\log_a 1)\cdot(\log_b g(x)-\log_b 1)\geq 0,$$

$$(a-1)(f(x)-1)(b-1)(g(x)-1)\geq 0,$$

Рационализация выражений

$$в)\ \frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{\log_b h(x)}\geq 0,$$

$ОДЗ: a\rangle 0, a\neq 1, b\rangle 0, b\neq 1,$
$f(x)\rangle 0, g(x)\rangle 0, h(x)\rangle 0, h(x)\neq 1.$

$$\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{\log_b h(x)-0}\geq 0,$$

$$\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{\log_b h(x)-\log_b 1}\geq 0,$$

$$\frac{(a-1)(f(x)-g(x))}{(b-1)(h(x)-1)}\geq 0.$$

Рационализация логарифмических выражения:

ТЕОРЕМА

При $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$ **знаки выражений** $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ **и** $(a-1)(f(x) - g(x))$ **совпадают.**

Стандартные ошибки при использовании метода рационализации:

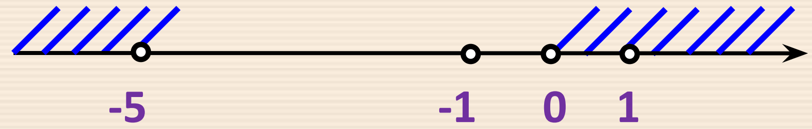
- проводят рационализацию без учёта области определения данного неравенства;
- применяют метод рационализации к неравенствам, не приведённым к стандартному виду F(x) > 0, $F(x) = \log_a f(x) - \log_a g(x)$
- формально применяют метод рационализации к выражению вида $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, заменяя на выражение $f(x) + g(x)$.
- подменяют формулировку <u>«о совпадении знаков выражений для каждого допустимого x»</u> на неверную формулировку <u>« о</u>

Решить неравенство:

$$\frac{2\log_6\left(x^2+5x\right)}{\log_6 x^2}\le 1.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2+5x>0, \\ x^2>0, \\ x^2\ne 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+5)>0, \\ x\ne 0, \\ x\ne \pm 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-5, \\ x>0, \end{array}\right. \\ x\ne 0, \\ x\ne \pm 1. \end{cases}$$



$$x\in(-\infty;-5)\cup(0;1)\cup(1;+\infty).$$

$$\frac{\log_6\left(x^2+5x\right)^2}{\log_6 x^2}-1\le 0,$$

$$\frac{\log_6\left(x^2+5x\right)^2-\log_6 x^2}{\log_6 x^2}\le 0,$$

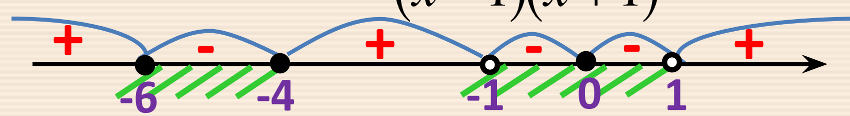
$$\frac{\log_6\left(x^2+5x\right)^2-\log_6 x^2}{\log_6 x^2-0}\le 0,$$

$$\frac{\log_6\left(x^2+5x\right)^2-\log_6 x^2}{\log_6 x^2-\log_6 1}\le 0,$$

$$\frac{(6-1)\left(\left(x^2+5x\right)^2-x^2\right)}{(6-1)\left(x^2-1\right)}\le 0,$$

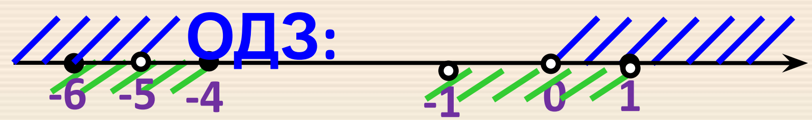
$$\frac{\left(x^2+5x-x\right)\left(x^2+5x+x\right)}{(x-1)(x+1)}\le 0,$$

$$\frac{x^2(x+4)(x+6)}{(x-1)(x+1)}\le 0.$$



$$x\in[-6;-4]\cup(-1;1).$$

С учётом ОДЗ:



$$x\in[-6;-5)\cup(0;1).$$

Ответ: $[-6;-5);(0;1).$

Решить неравенство:

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$$

ОДЗ:

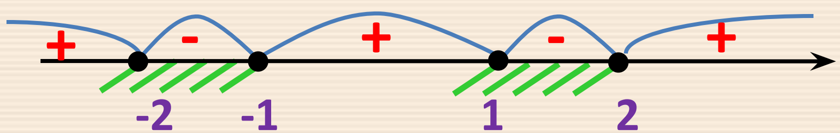
$$\begin{cases} x+2>0,\\ 2-x>0,\\ 2-x\ne 1,\\ 3-x>0,\\ x+3>0,\\ x+3\ne 1; \end{cases}\quad \begin{cases} x>-2,\\ x<2,\\ x\ne 1,\\ x<3,\\ x>-3,\\ x\ne -2; \end{cases}\quad \begin{cases} x>-2,\\ x<2,\\ x\ne 1; \end{cases}\quad \begin{cases} -2<x<2,\\ x\ne 1. \end{cases}\quad x\in(-2;1)\cup(1;2).$$

$$(\log_{2-x}(x+2)-0)\cdot(\log_{x+3}(3-x)-0)\le 0,$$

$$(\log_{2-x}(x+2)-\log_{2-x}1)\cdot(\log_{x+3}(3-x)-\log_{x+3}1)\le 0,$$

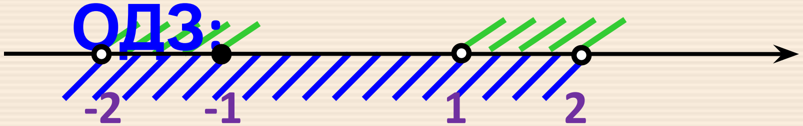
$$(2-x-1)(x+2-1)(x+3-1)(3-x-1)\le 0,$$

$$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x)\le 0.$$



$$x\in[-2;-1]\cup[1;2].$$

С учётом ОДЗ:



$$x\in(-2;-1]\cup(1;2).$$

Ответ: $(-2;-1];(1;2).$