МБОУ «Яфаровская СОШ»

Методы решения тригонометрических уравнений

Учитель математики: Набиуллина Ирина Александровна

Содержание

- *Метод замены переменной*
- *Метод разложения на множители*
- *Однородные тригонометрические уравнения*
- *С помощью тригонометрических формул:*
  - *Формул сложения*
  - *Формул приведения*
  - *Формул двойного аргумента*

Метод замены переменной

С помощью замены $t = \sin x$ *или* $t = \cos x$*, где* $t \in [-1;1]$ *решение исходного уравнения сводится к решению квадратного или другого алгебраического уравнения*

Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в том, что произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом не теряют смысл:

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot \ldots = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \text{ или } g(x) = 0 \text{ или } h(x) = 0$$

и т.д. при условии существования каждого из сомножителей

Однородные тригонометрические уравнения

*Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени.***

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad \Big| : \cos x$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Замечание.

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ *называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.*

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad \Big| : \cos^2 x$$

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\, x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $\mathrm{tg}\, x = t$ *и решаем методом замены переменной.*

<u>Замечание.</u> Если в данном уравнении $a = 0$ *или* $c = 0$ *то, уравнение решается методом разложения на множители.*

С помощью тригонометрических формул

1. Формулы сложения:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\, tgy} \qquad ctg(x+y) = \frac{ctgx\, ctgy - 1}{ctgy + ctgx}$$

$$tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx\, tgy} \qquad ctg(x-y) = \frac{ctgx\, ctgy + 1}{ctgy - ctgx}$$

С помощью тригонометрических формул

2. Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$$

$$\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t \qquad \cos(\pi \pm t) = -\cos t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$$

$$\sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t \qquad \cos(2\pi \pm t) = \cos t$$

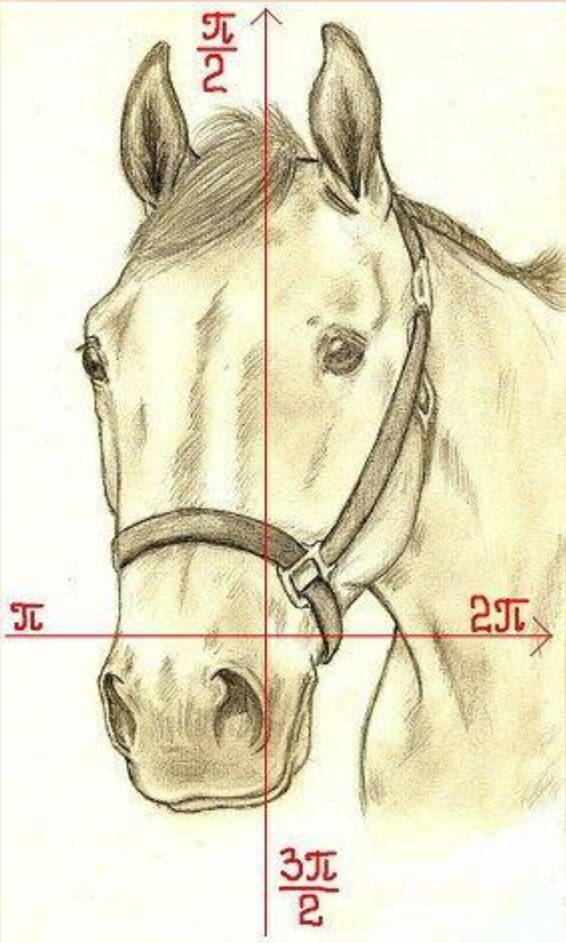
$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp ctg\, t \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp tg\, t$$

$$tg(\pi \pm t) = \pm tg\, t \qquad ctg(\pi \pm t) = \pm ctg\, t$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp ctg\, t \qquad ctg\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp tg\, t$$

$$tg(2\pi \pm t) = \pm tg\, t \qquad ctg(2\pi \pm t) = \pm ctg\, t$$

Лошадиное правило



В старые добрые времена жил рассеянный математик, который при поиске ответа менять или не менять название функции (*синус* на *косинус*), смотрел на свою умную лошадь, а она кивала головой вдоль той оси координат, которой принадлежала точка, соответствующая первому слагаемому аргумента $\boldsymbol{\pi/2 + a}$ или $\boldsymbol{\pi + a}$. Если лошадь кивала головой вдоль оси ***ОУ***, то математик считал, что получен ответ ***«да, менять»***, если вдоль оси ***ОХ***, то ***«нет, не менять»***.

С помощью тригонометрических формул

3. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

- *Решить уравнение* $2\cos 2x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$
- *Найти корни уравнения, принадлежащие отрезку* $[-3\pi;\ -\pi]$
- *Ответ: а)* $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi к, к \in Z$
- *б)* $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}.$

Задания из открытого банка

- *№1*а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin(-\frac{5\pi}{2}+x)\cdot\sin x = \cos x$
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$
- *Ответ:*
- *а)* $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ n,k \in Z$
- *б)* $\frac{9\pi}{2};\ \frac{19\pi}{4};\ \frac{11\pi}{2}.$

- *а)* Решите уравнение $4sin^2\text{x} - 12\cos x + 5 = 0$
- *б)* Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.
- Ответ:
- а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ k \epsilon Z$
- б) $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.