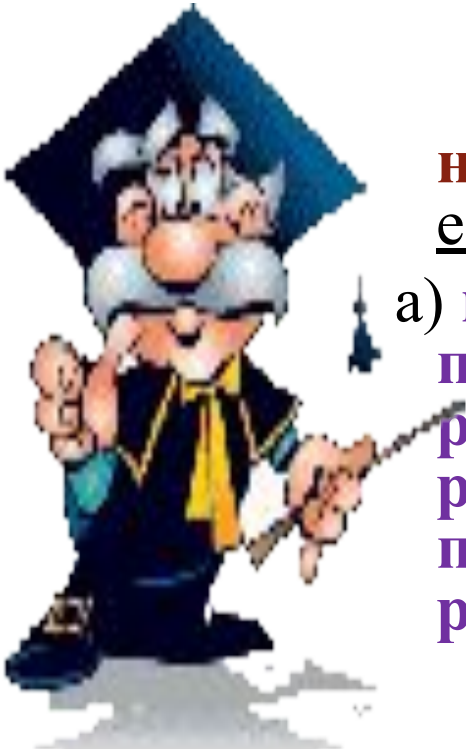
Цели:

- развитие логического мышления формируя умения и навыки решения систем и совокупностей неравенств, выполняя равносильные переходы;
- развитие умения кратко отвечать на вопрос и ставить его;
- развитие учебно-коммуникативных умений при работе в группе (слушать, аргументировать, доходчиво объяснять);
- развитие умений работать во времени;
- развитие навыков самостоятельной деятельности и самоконтроля.

Решение неравенств с одной переменной

Определение



Два неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)<g_2(x)$ называются равносильными на множестве X, если выполнены два условия:

а) **каждое решение первого неравенства, принадлежащее множеству X, является решением второго, и наоборот, каждое решение второго неравенства, принадлежащее множеству X, является решением первого**;

б) **или оба неравенства не имеют решений**.

Таким образом, два неравенства являются равносильными на множестве X, если множества решений этих неравенств совпадают.

ПОЭТОМУ ВМЕСТО ТОГО ЧТОБЫ РЕШАТЬ ДАННОЕ НЕРАВЕНСТВО, МОЖНО РЕШАТЬ ЛЮБОЕ ДРУГОЕ, РАВНОСИЛЬНОЕ ДАННОМУ.

Замену одного неравенства другим, равносильным данному на X, называют равносильным переходом на X.

Равносильный переход обозначат двойной стрелкой $\Leftrightarrow$.

Например: $x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1.$

Неравенства $x^2 > 9$ и $2x > 6$ неравносильны, т. к. множеством решений первого неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -3)(3; \infty)$, а решением второго неравенства является промежуток $(3; \infty)$.

Важно понимать, что для доказательства неравносильности двух неравенств нет необходимости решать каждое из неравенств, а затем убеждаться в том, что множества их решений не совпадают – достаточно указать одно решение одного из неравенств, которое не является решением другого неравенства.

Пусть функции f(x), g(x), h(x) определены на множестве X.

Шесть теорем о равносильности

Теорема 1. **Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.**

$$1.\ f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x).$$

Пусть функции f(x), g(x), h(x) определены на множестве X.

Шесть теорем о равносильности

Теорема 2. **Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.**

5. Для любых $f(x)$ и $g(x)$ на X и $n \in N$: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) < g^{2n+1}(x)$.

Теорема 5. **Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень n получится неравенство того же смысла $f(x)^n > g(x)^n$, равносильное данному.**

4. Если $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ на X, то $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^{2}(x) < g^{2}(x)$.

Пусть функции f(x), g(x), h(x) определены на множестве X.

Шесть теорем о равносильности

Теорема 3. **Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно:**

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теорема 6. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно:**

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Пусть функции f(x), g(x), h(x) определены на множестве X.

Шесть теорем о равносильности

Теорема 4. **а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.**

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

2. Если $h(x) > 0$ на X, то $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$.

3. Если $h(x) < 0$ на X, то $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$.

Системы и совокупности неравенств

Определение.

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением заданных неравенств.

Частное решение системы неравенств – *значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство.*

Множество всех частных решений системы неравенств представляют собой **общее решение системы неравенств.**

Решить систему неравенств – значит найти все её частные решения.

Решение системы неравенств представляет собой пересечение решений неравенств, образующих систему.

Неравенства, образующие систему, объединяются <u>фигурной скобкой.</u>

Например:

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geq 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 4, \\ 3x \geq 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \geq 4; \end{cases}$$

$$(2; \infty) \cap [4; \infty) = [4; \infty)$$

Ответ: $[4;\infty)$

Определение.

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность неравенств, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является <u>хотя бы одного</u> из заданных неравенств.

Каждое такое значение переменной называют частным решением совокупности неравенств.

Множество всех частных решений совокупности неравенств представляет собой решение совокупности неравенств.

Решение совокупности неравенств представляет собой **объединение решений неравенств**, образующих совокупность.

Неравенства, образующие совокупность, объединяются **квадратной скобкой.**

Например

Решим совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1>3, \\ 3x-2\geq 10; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x>4, \\ 3x\geq 12; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x\geq 4; \end{array}\right.$$

$$(2;\infty)\cup[4;\infty)=(2;\infty)$$

Ответ: $(2;\infty)$

Задание группам

№ 57.4а;

№ 57.5а;

№ 57.8а.

Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant -4.$

Необходимо вспомнить правила перехода от логарифмического неравенства к системе:

при $a > 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

№ 57.11

Решить неравенство

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x).$$

Необходимо рассмотреть два случая:

$$1)\ x-2>1;$$

$$2)\ 0<x-2<1.$$

Метод введения новой переменной при решении неравенств

57.16 – 57.20 б, 57.21а, 57.22а

Домашнее задание

№№

57.4б,

57.5б,

57.8

57.10

56.16-57.20 а

Литература:

1. А.Г.Мордкович «Алгебра и начала анализа», часть 1, «Мемозина», Москва, 2012.
2. А.Г.Мордкович «Алгебра и начала анализа», часть 2, «Мемозина», Москва, 2012.

Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств, в которых используют возведение в натуральную степень обеих частей неравенства.

- $$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (1)$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (2)$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (3)$$

- $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (3)$$

- $$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^{2n}(x), \\ f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (4)$$

- $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x) \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (5)$$

- $$\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^{2n}(x) \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (6)$$
- $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x); \qquad (7)$$
- $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g^{2n+1}(x), \qquad (8)$$

где символ $\vee$ *в схемах* $(7),(8)$ *заменяет один из зников неравенства*: $>, <, \ge, \le$.

Пример 3. *Решите неравенство* $\sqrt{x+18} < 2 - x.$

Решение. *Если 2 - х < 0 или 2 - х = 0 , то исходное неравенство не выполняется, так как по определению арифметического квадратного корня*

$$\sqrt{x+18} \geq 0$$

Пусть 2 - х > 0 , тогда при возведении обеих частей неравенства в квадрат получим на ее области определения и при условии 2 - х > 0 равносильное неравенство.

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \geq 0, \\ 2-x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0, \\ x \geq -18, \\ x < 2. \end{cases}$$

$-18 \leq x < -2$ *решение системы.*

а) $\sqrt{x^2 - x - 12} < x;$

Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 > x^2. \end{cases}$$

б) $\sqrt{x^2 - x - 12} > x.$

Составим совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}\end{array}\right.$$

Функционально-графический метод при решении неравенств

№ 57.23 – 57.25 а, б

Неравенства с модулями

Существует три способа решения неравенств с модулями

1. Геометрический
2. Возведение в квадрат
3. Универсальный (по определению)

1 способ: Геометрический

Решить неравенство $|2x - 5| > 4$.

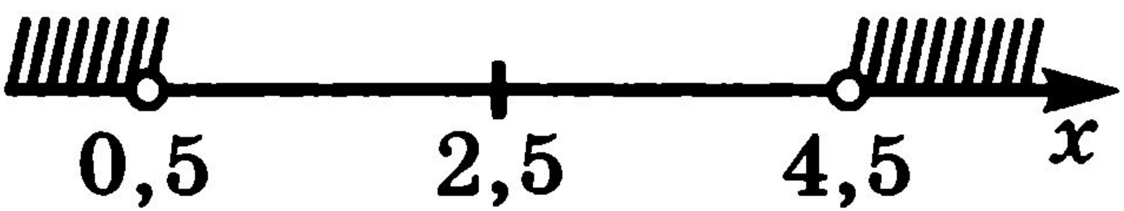
ПРЕОБРАЗУЕМ НЕРАВЕСТВО:

$$|2(x - 2{,}5)| > 4;$$

$$2|x - 2{,}5| > 4;$$

$$|x - 2{,}5| > 2.$$

Модуль – это расстояние!!!!



$x < 0{,}5;$ $x > 4{,}5.$

2 способ: возведение в квадрат

При условии, если обе части неравенства неотрицательны!!!

Решить неравенство $|2x-5|>4.$

$$|2x-5|^2>4^2.$$

$$(2x-5)^2>4^2;$$

$$(2x-5)^2-4^2>0;$$

$$x<0{,}5;\ x>4{,}5.$$

3 способ: по определению модуля - универсальный

Решить неравенство $|2x-5|>4$.

По определению, под знаком модуля может стоять отрицательное или неотрицательное выражение!!

получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 2x-5 \geqslant 0, \\ 2x-5>4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5<0, \\ -(2x-5)>4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ x>4{,}5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x<2{,}5, \\ x<0{,}5, \end{cases}$$

Объединяя найденные решения двух систем неравенств, получаем:

$$x<0{,}5;\ x>4{,}5.$$