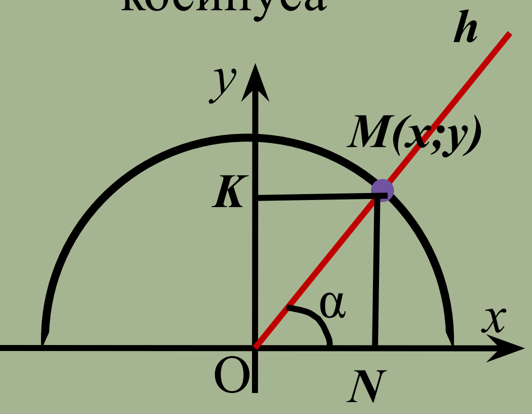
Определение тригонометрических функций

Учитель математики МБОУ лицея №2 Бокова Татьяна Николаевна

Определение синуса и косинуса



$$\sin\alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x$$

Синус угла α - ордината точки *M*,

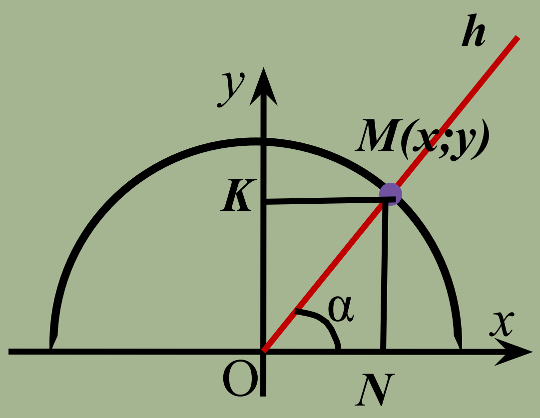
косинус угла α - абсцисса точки М

$$0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$$

$$0 \le \sin\alpha \le 1$$

$$-1 \le \cos\alpha \le 1$$

Определение тангенса и котангенса



$$0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$$

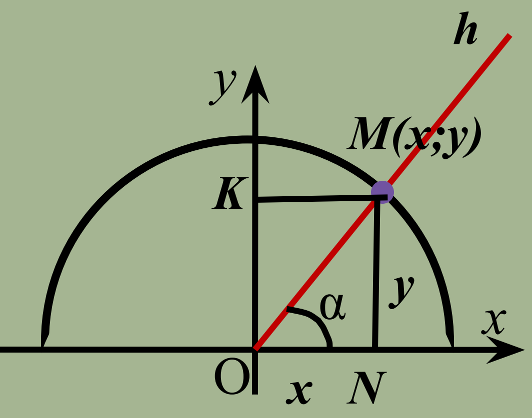
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$$

$$!!!\alpha \ne 90^\circ$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}$$

$$!!!\alpha \ne 0^\circ, \alpha \ne 180^\circ$$

Основное тригонометрическое тождество



Для любого угла α (0° ≤α ≤ 180°)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Доказательство.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \frac{y^2}{OM^2} + \frac{x^2}{OM^2} = \frac{x^2 + y^2}{OM^2} = \frac{OM^2}{OM^2} = 1$$

Следствия

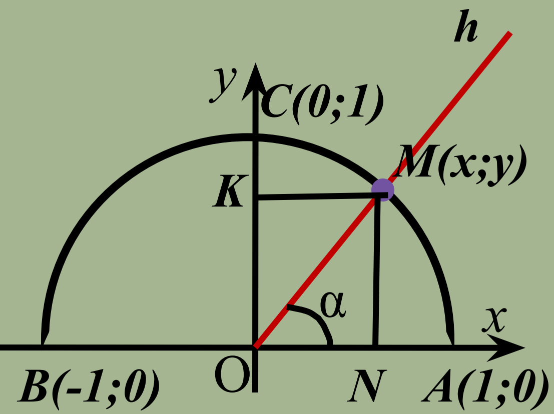
Для любого угла α (0° ≤α ≤ 180°, α≠90°)

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Для любого угла α (0° ≤α ≤ 180°)

$$1 + ctg\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Таблица значений тригонометрических функций для углов 0°, 90°, 180°



α	sinα	cosα	tgα	ctgα
0°	0	1	0	Не сущ
90°	1	0	Не сущ	0
180°	0	-1	0	Не сущ

Практическое задание

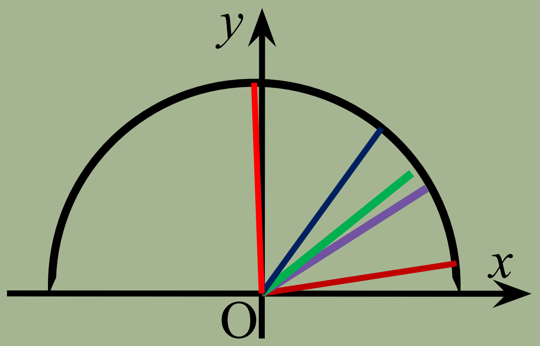
Начертите единичную полуокружность и постройте углы, синусы которых равны 0,3; 0,5; 0,6; 0,8; 1

Образец решения.

Синус угла – это ордината точки.
Необходимо знать и абсциссу точки, которая равна косинусу угла.

***y*=0,3,**

$$x=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0,09}=\sqrt{0,91}\approx 0,95$$



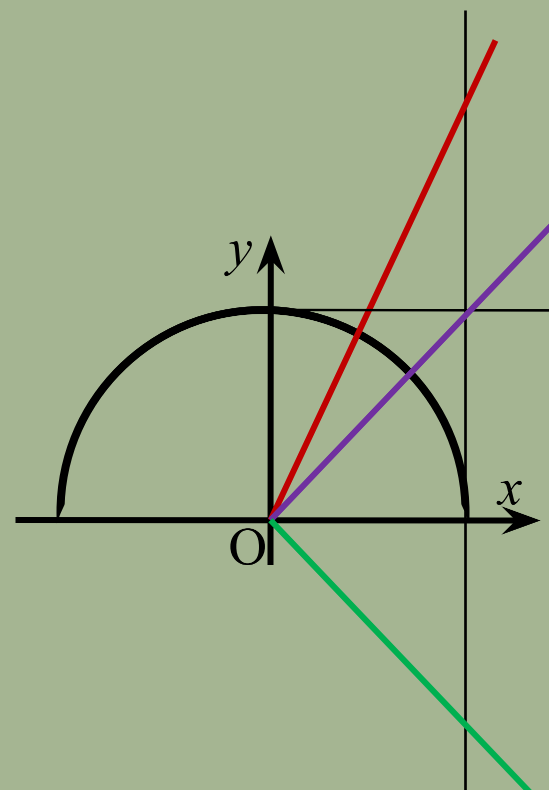
Практическое задание

Начертите единичную полу-окружность и постройте углы, тангенсы которых равны: 2; 1; -2; 3.

Образец решения.

Построим луч OM так, чтобы tg*α*=2. Пусть точка M принадлежит единичной полуокружности и имеет координаты (*x;y*). Тогда sin*α*=*y*, cos*α*=*x*, поэтому tg*α*=*y*/*x*=2, *y*=2*x*.

Таким образом, задача сводится к построению точки M единичной полуокружностих с координатами (x;y), удовлетворяющими условию *y*=2*x*



$$\frac{y}{x}=1 \qquad \frac{y}{x}=2$$

$$y=x \qquad y=2x$$

Таблица значений sinα, cosα, tgα, ctgα для углов α, равных 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°.

α	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ	0	Не сущ
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не сущ	0

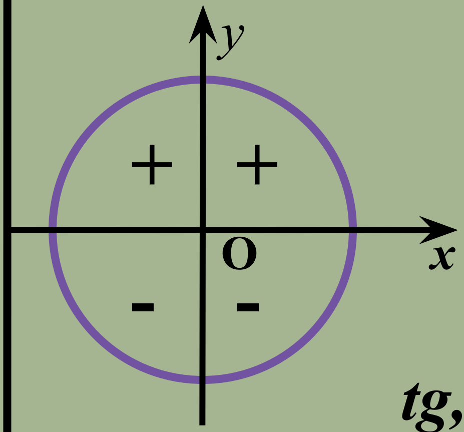
Связь между тангенсом и котангенсом угла

Для любого угла α (0° ≤α ≤ 180°, α≠90°)

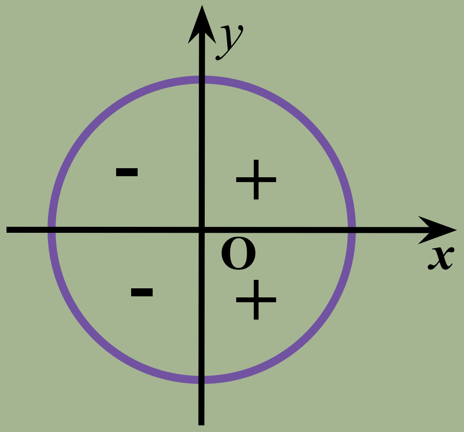
$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$$

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям

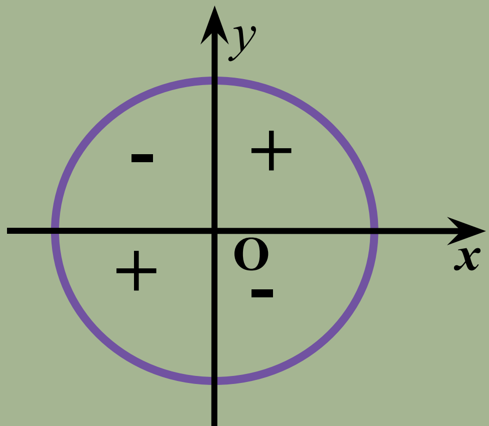
sin



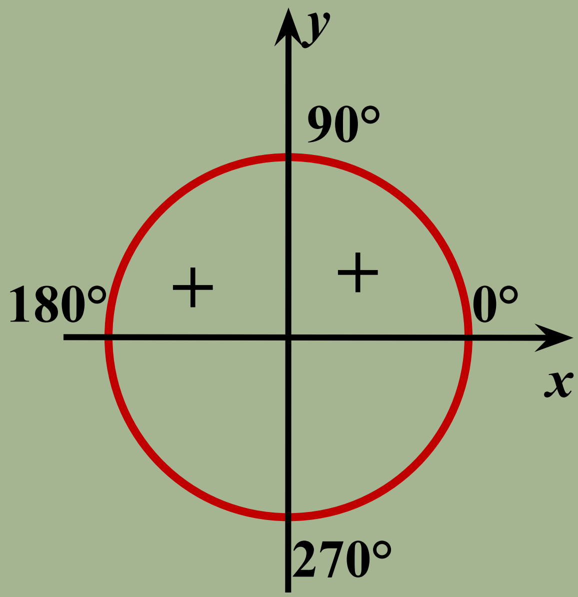
cos



tg, ctg



Формулы приведения



$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

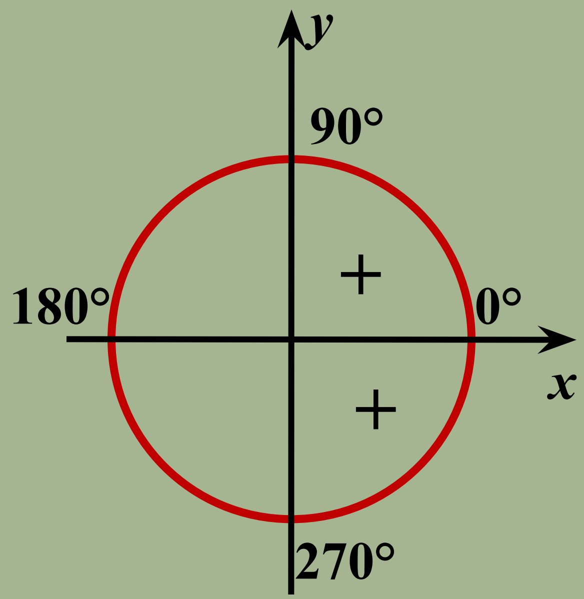
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$$

Формулы приведения



$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$

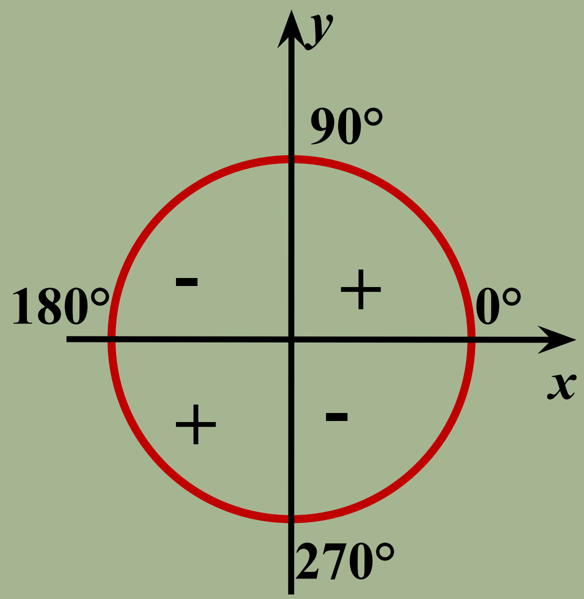
$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$

Формулы приведения



$tg\,(90° - \alpha) = ctg\alpha$

$tg\,(90° + \alpha) = -ctg\alpha$

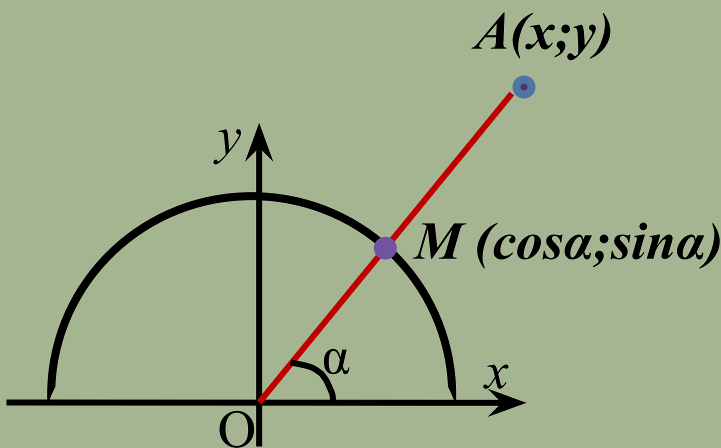
$tg\,(180° + \alpha) = tg\alpha$

$tg\,(180° - \alpha) = -tg\,\alpha$

$tg\,(270° - \alpha) = ctg\,\alpha$

$tg\,(270° + \alpha) = -ctg\,\alpha$

Формулы для вычисления координат точки



Координаты точки *A(x; y)* определяются по формулам

x = OA cos α ;   y = OA sin α

$$\overrightarrow{OM}\{\cos\alpha;\sin\alpha\}$$

$$\overrightarrow{OA}\{x;y\}$$

$$\overrightarrow{OA}=OA\cdot\overrightarrow{OM}$$

$$x=OA\cos\alpha,\ y=OA\sin\alpha$$

Задача.

Найдите значения косинуса, тангенса, котангенса угла α, если sinα=0,6, 90° <α<180°

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{4}{3}$$

Задача

Заполните таблицу

	120°	135°	150°
sin α			
cos α			
tg α			
ctg α			

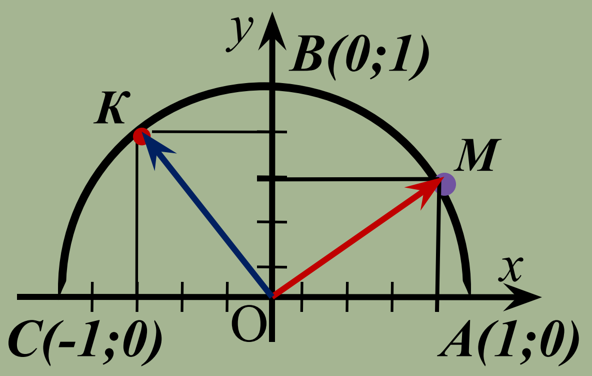
<u>Образец решения</u>

$$\sin 120^\circ = \sin\left(90^\circ + 30^\circ\right) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

или

$$\sin 120^\circ = \sin\left(180^\circ - 60^\circ\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задача.



Найдите по рисунку синус, косинус, тангенс угла:

а) *AOM;*
б) AOK;
в) AOC;
г) AOB.

а) Угол AOM образован лучом OM и положительной полуосью абсцисс. Точка M лежит на единичной окружности. Следовательно, синус угла AOM равен ординате точки M, то есть sin∠AOM=0,6. Косинус угла AOM равен абсциссе точки M, то есть cos∠AOM=0,8.
tg∠AOM=AM:OA=0,6:0,8=0,75.

б) $\sin\angle AOK = 0{,}8; \cos\angle AOK = -0{,}6; tg\angle AOK = -\frac{4}{3}.$

в) $\sin\angle AOC = 0; \cos\angle AOC = -1; tg\angle AOC = 0.$

г) $\sin\angle AOB = 1; \cos\angle AOB = 0; tg\angle AOB$

не существует.

Задача.

Принадлежат ли единичной окружности точки:

а) P(-0,6; 0,8);

б) $T\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$;

в) $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

Ответы:

б) не принадлежит;

в) принадлежит

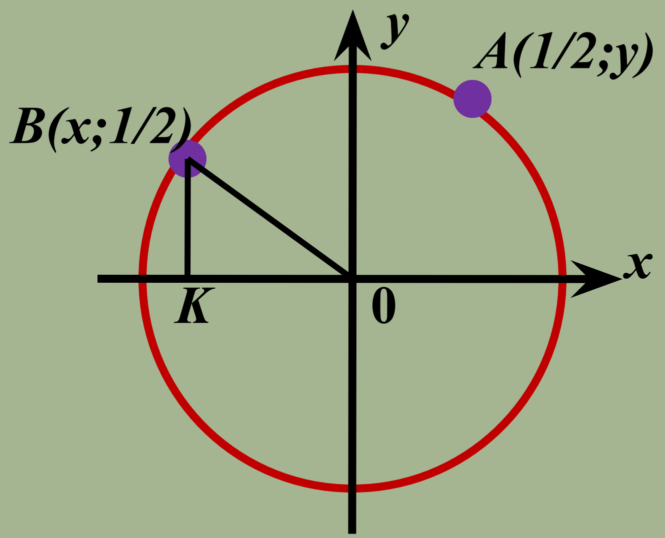
Точка с координатами (*x*; *y*) принадлежит единичной окружности, если выполнены два условия: 1) $-1\le x \le 1$, $-1\le y \le 1$; 2) $x^2+y^2=1$.

Образец решения

а) Координаты точки P удовлетворяют первому условию, так как : $-1\le -0,6 \le 1$, $-1 \le 0,8 \le 1$.
Проверим второе условие : $x^2+ y^2 =$ $=0,36 + 0,64 = 1$, следовательно, выполняется второе условие. Поэтому точка P принадлежит единичной окружности.

Задачи по готовым чертежам (урок № 28)

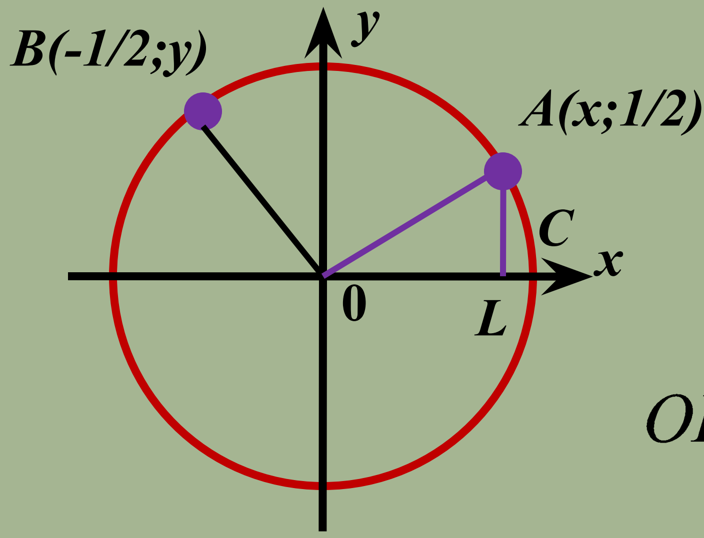
Найдите *x*, *y*.



$$KO = \sqrt{OK^2 - BK^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Найдите: $\angle COA, \angle COB$



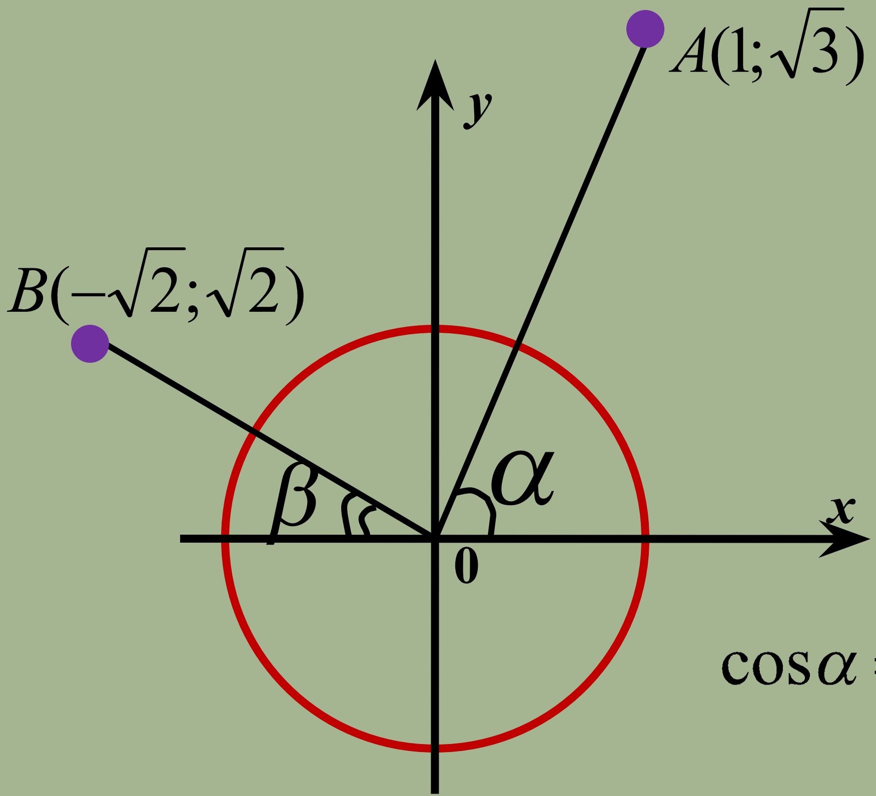
$$\sin \angle COA = \frac{1}{2}$$

$$OL = \sqrt{OA^2 - AL^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \angle COA = OL = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle COA = 30^{\circ}$$

$$\angle COB = 120^{\circ}$$



Найти α, β

$$x_A = OA\cos\alpha$$

$$y_A = OA\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x_A}{OA} = \frac{1}{\sqrt{OK^2 + AK^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{y_A}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta = 45^{\circ}$$

$$\alpha = 60^{\circ}$$

Вычислите:

$$\left(\cos 135^\circ\right)^2 + \sin 150^\circ =$$

$$\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot tg\,135^\circ =$$

$$tg\,45^\circ \cdot \sin^2 45^\circ =$$