

ПРОИЗВОДНАЯ

# Задачи, приводящие к понятию производной

## 1. Задача о касательной

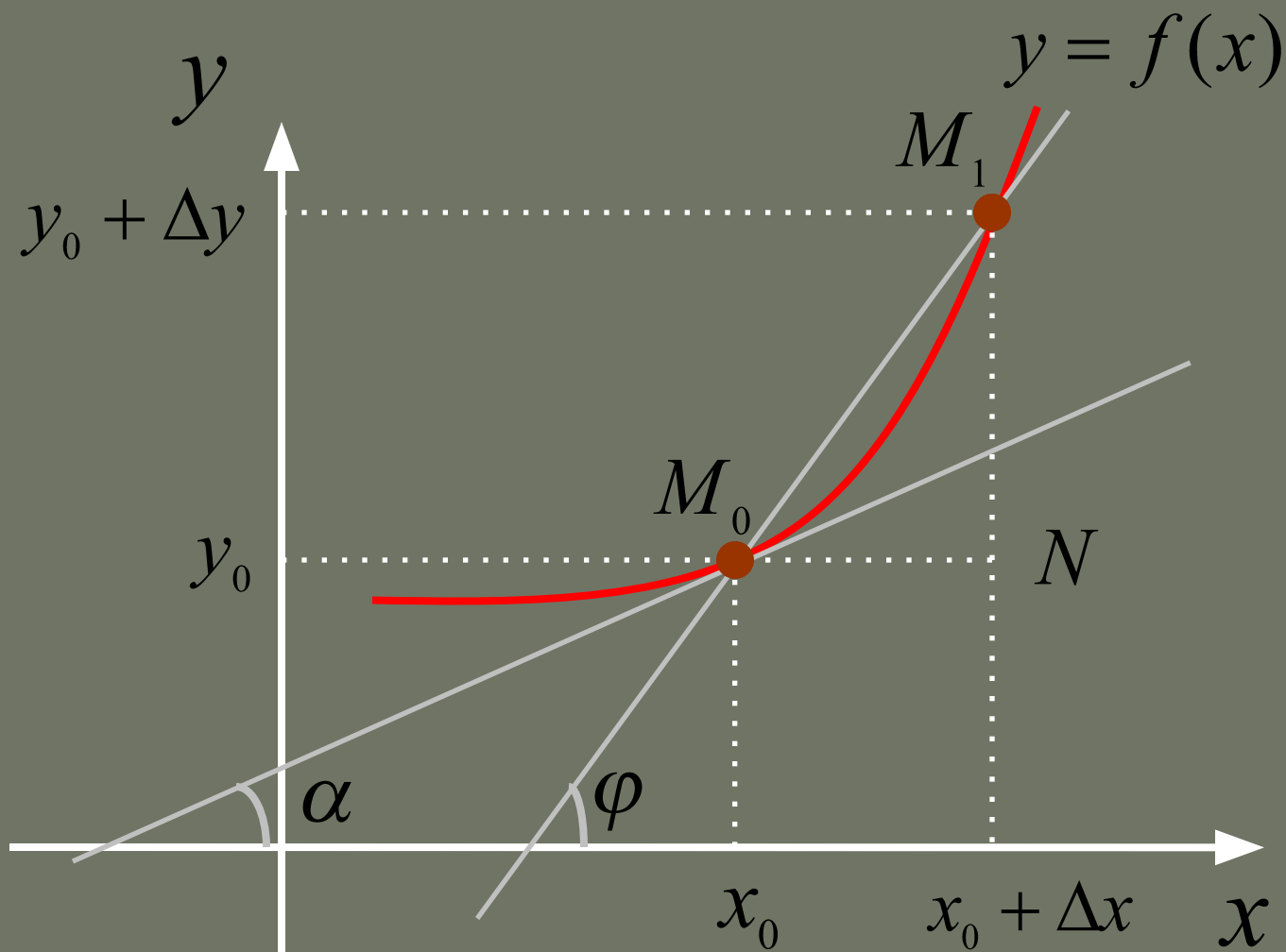
*Пусть на плоскости  $XOY$  задана непрерывная кривая  $y=f(x)$ .*

*Необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .*

Дадим аргументу  $x_0$  приращение  $\Delta x$  и перейдем на кривой от точки  $M_0(x_0, f(x_0))$  к точке  $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ .

Проведем секущую  $M_0M_1$ .

*Под касательной к кривой  $y=f(x)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$  понимают предельное положение секущей  $M_0M_1$  при приближении точки  $M_1$  к точке  $M_0$ , т.е. при  $\Delta x \rightarrow 0$*



Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0$  имеет вид:

$$y - f(x_0) = k(x - x_0)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $M_0M_1N$ :

$$k_{M_0M_1} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- угловой коэффициент секущей  $M_0M_1$ .

Тогда угловой коэффициент касательной к кривой в точке  $M_0$ :

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{M_0 M_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

## 2. Задача о скорости движения

*Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону  $S=S(t)$ , где  $S$  – пройденный путь,  $t$  – время движения.*

*Требуется найти скорость в момент времени  $t_0$ .*

На момент времени  $t_0$  пройденный путь составит  $S_0 = S(t_0)$ , на момент времени  $t_0 + \Delta t$  пройденный путь составит  $S_0 + \Delta S = S(t_0 + \Delta t)$ .

Тогда за промежуток времени  $\Delta t$  средняя скорость составит:

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Чем меньше  $\Delta t$ , тем лучше средняя скорость характеризует движение в момент  $t_0$ .



Поэтому под скоростью точки в момент времени  $t_0$  понимают:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

### 3. Задача о производительности труда

*Пусть функция  $u=u(t)$  выражает количество произведенной продукции  $u$  за время  $t$ .*

*Требуется найти производительность труда в момент времени  $t_0$ .*

За период от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  количество произведенной продукции изменится от  $u_0 = u(t_0)$  до  $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$ .

Тогда за промежуток времени  $\Delta t$  средняя производительность труда составит:

$$z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Чем меньше  $\Delta t$ , тем лучше средняя производительность труда характеризует производительность в момент  $t_0$ .

Производительность труда в момент  $t_0$  есть предельное значение средней производительности за период времени от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$