Методы решения логарифмических неравенств.
Их недостатки и преимущества

10 класс.

МБОУ «Лицей №2 г. Протвино
Учитель математики Ларионова Г. А.

Цель

- **Рассмотреть разные способы решения логарифмических неравенств с основанием, содержащим переменную.**

- **Помочь научиться выбирать наиболее «экономичный» способ решения.**

Предложите способ решения этого неравенства и кратко опишите его.

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \geq 0$$

Способы решения логарифмических неравенств с основанием, содержащим переменную.

- **Традиционный способ.**
- **Обобщенный метод интервалов.**
- **Метод рационализации неравенств**

Традиционный способ.

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$$

где $a(x)$; $f(x)$; $g(x)$ - **некоторые функции.**

При решении необходимо рассмотреть два случая:

1. Основание логарифма $0<a(x)<1$, функция - монотонно убывающая, поэтому при переходе к аргументам знак неравенства меняется на противоположный $f(x)<g(x)$

2. Основание логарифма $a(x)>1$, функция - монотонно возрастающая, поэтому при переходе к аргументам знак неравенства остается без изменения $f(x)>g(x)$

Метод рационализации

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$$

сводится к решению системы неравенств, в которую входит **ОДЗ** логарифмических функций: $a(x)>0$; $a(x)\neq 1$, а также $f(x)>0$; $g(x)>0$ и $(a(x)-1)(f(x)-g(x))\geq 0$.

это неравенство и является сутью данного метода, оно в себе содержит сразу два случая, которые рассматриваются при традиционном методе:

Обобщенный метод интервалов.

- Перейти к логарифмам по числовому основанию и привести к общему знаменателю.

$$\frac{\log_c f(x) - \log_c g(x)}{\log_c a(x)} \geq 0$$

- Найти ОДЗ неравенства, нули числителя и знаменателя.
- Отметить на числовой прямой **ОДЗ и нули**.
- На полученных промежутках определить знаки полученной дроби, выбирая из каждого промежутка пробную точку.

Найдите ошибки в решении

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1$$

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \le \log_{x^2}x^2$$

$$\begin{cases} x^2 \ne 1 \\ x^2 > 0 \\ (x-1)^2 \le x^2 \\ (x-1)^2 \ne 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ne \pm 1 \\ x \ne 0 \\ x^2 - 2x + 1 - x^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ne \pm 1 \\ x \ne 0 \\ x \ge 0,5 \end{cases}$$

Ответ: $[0,5;\ 1) \cup (1 + \infty)$

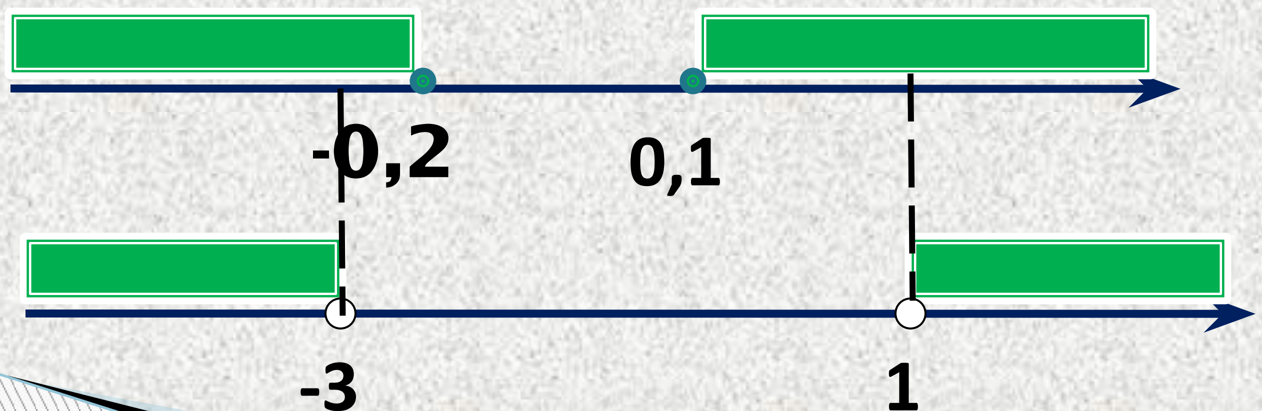
Найдите ошибки в решении

$$\log_{10x}(10x+3)\log_x(3x+10)\geq 0$$

$$\begin{cases}\log_{10x}(10x+3)\geq 0\\ \log_x(3x+10)\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(10x-1)(10x+2)\geq 0\\ (x-1)(3x+9)\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-0,1)(x+0,2)\geq 0\\ (x-1)(x+3)\geq 0\end{cases}$$



Ответ: **(-∞; -3] ∪[1;+ ∞)**

Найдите ошибки в решении

$$\log_{x^2}(x+2) \le 1$$

$$\log_{x^2}(x+2) - \log_{x^2} x^2 \le 0$$

$(x^2-1)(x+2-x^2)\le 0.$

$x+2-x^2=0,\quad D=1+8=9,$

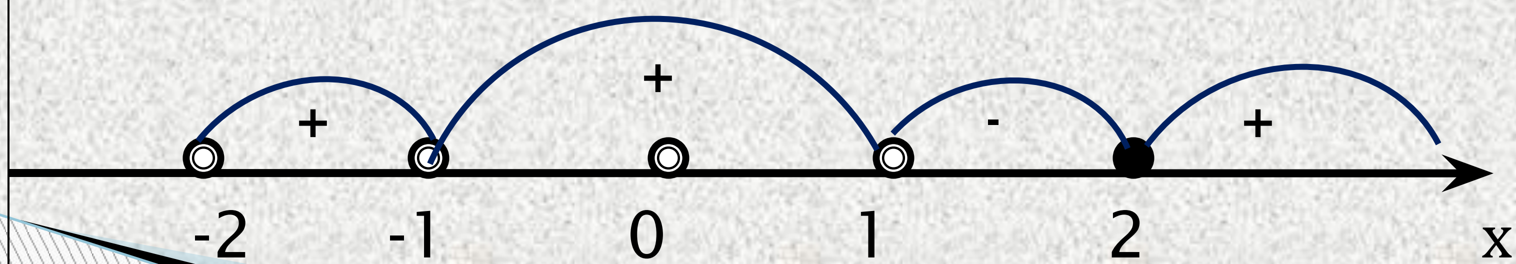
$x=2,\ x=-1$

$(x-1)(x+1)(x+1)(x-2) \le 0$

$(x-1)(x+1)^2(x-2) \le 0$, ОДЗ:

$$\begin{cases} x>-2; \\ x\ne 0 \\ x\ne 1 \\ x\ne -1 \end{cases}$$

$x=1,\ x=-1,\ x=2$



Ответ: $(1;\ 2]$

Найдите ошибки в решении

$\log_{x^2}(x+2) \le 1$

$\dfrac{\lg(x+2)}{\lg x^2} - 1 \le 0$

$\dfrac{\lg(x+2) - \lg x^2}{\lg x^2} \le 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x > -2 \\ x \ne 0 \end{cases}$

Нули числителя и знаменателя:

$x+2 = x^2$

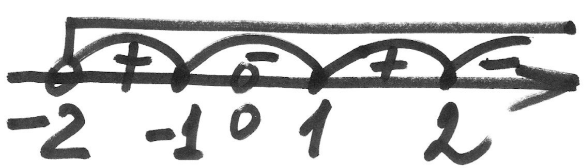
$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$

$x = -1$

$x^2 = 1$

$x = 1;\ x = -1$



$x = 3$

$\dfrac{\lg 5 - \lg 9}{\lg 9} < 0$

$x = 1{,}5$

$\dfrac{\lg 3{,}5 - \lg 2{,}25}{\lg 2{,}25} > 0$

$x = 0{,}5$

$\dfrac{\lg 2{,}5 - \lg 6{,}25}{\lg 6{,}25} < 0$

$x = -1{,}5$

$\dfrac{\lg 0{,}5 - \lg 2{,}25}{\lg 2{,}25} > 0$

Ответ: $[-1; 0) \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$

Решите неравенства.

1. $(3x + 7)\log_{2x+5}(x^2 + 4x + 5) \leq 0$

Ответ: [-7/3; -2)

2. $\log_{2x}(x + 4)\log_{x}(2 - x) \leq 0$

Ответ: (0,5; 1) ∪ (1; 2)

Для каждого из неравенств выберите удобный способ решения

$$\frac{\log_x(10x+3)\log_x(3x+10)}{\log_{2x}(10x)\log_{2x}(4x+1)} \geq 0$$

$$\frac{\log_{2x-1}(x^2-2x)}{\log_{2x-1}(x^2+6x+10)} \leq 0$$

$$\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}\left(5x-\frac{3}{10}\right) \leq 0.$$

Домашнее задание.

$$\mathrm{Log}_{(10-x^2)}(3{,}2x-x^2)<1$$

$$\mathrm{Log}_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)\geq \mathrm{Log}_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2)$$

Спасибо за внимание !