СЕМИНАР-ПРАКТИКУМ

«Методы решения планиметрических задач»

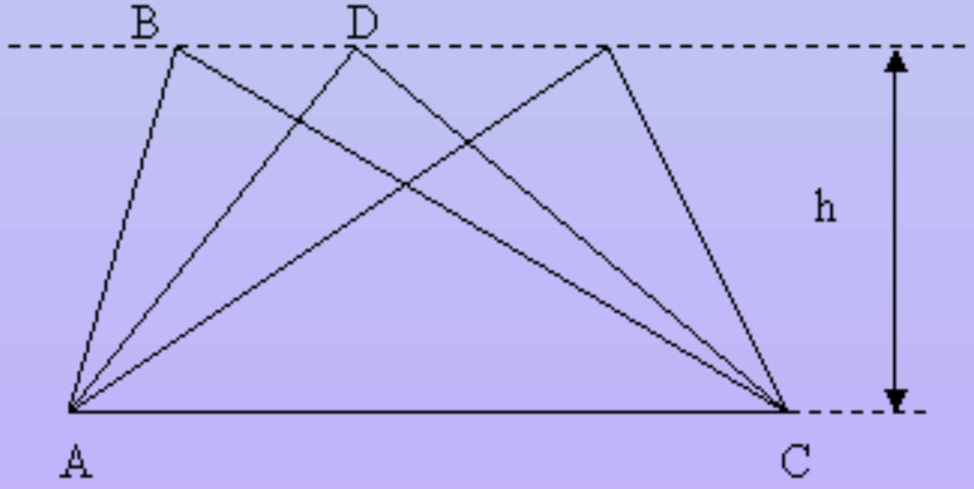
Метод площадей в решении задач

Квасова О.Д.,
учитель математики ВКК

Основные свойства площадей

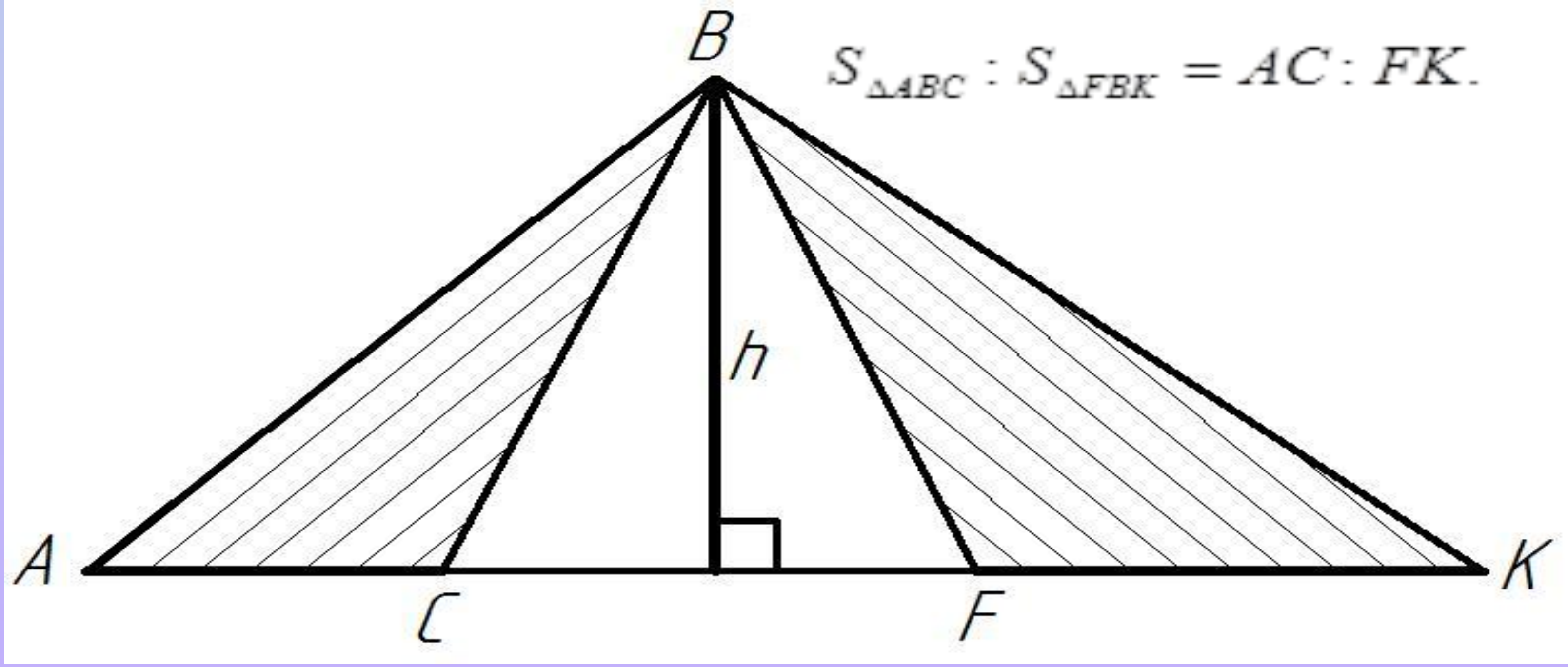
- **Свойство №1**

Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не измениться.



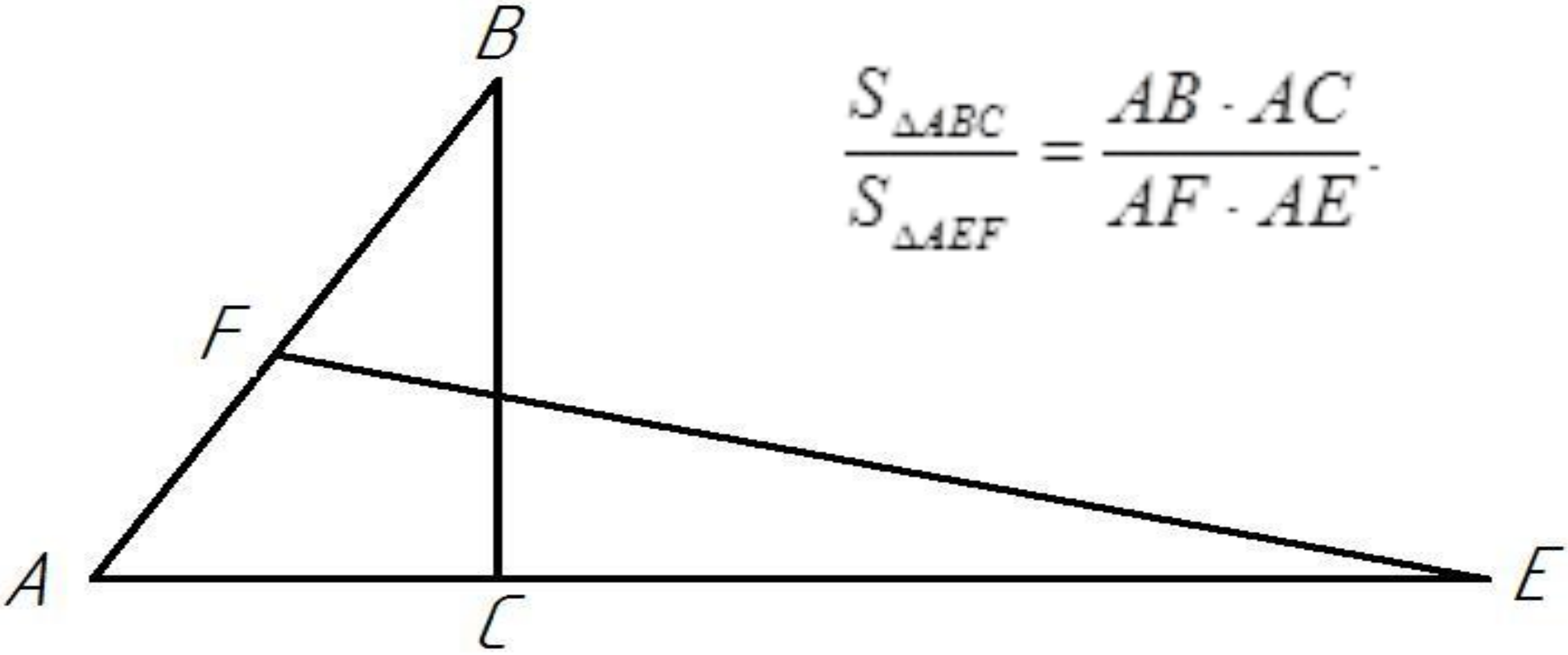
Свойство №2

Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).



Свойство №3

Если два треугольника имеют общий угол (или равный угол), то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.

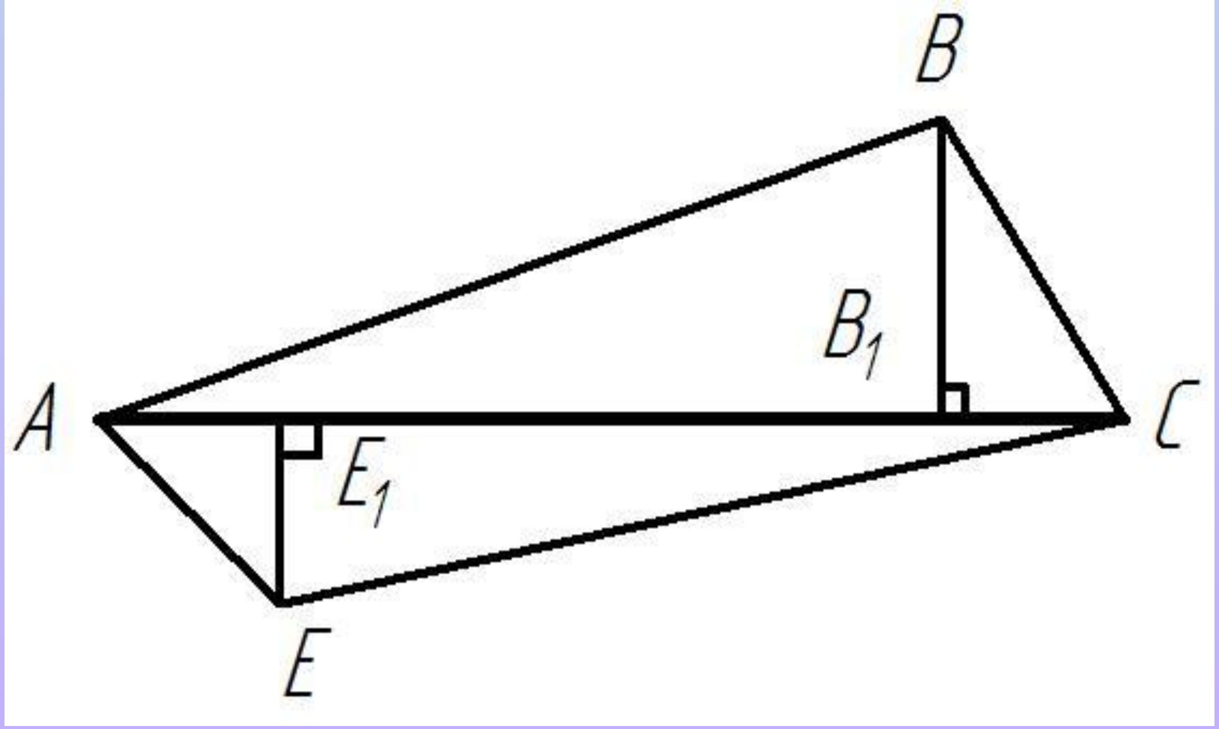


$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEF}} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AE}.$$

Свойство №4

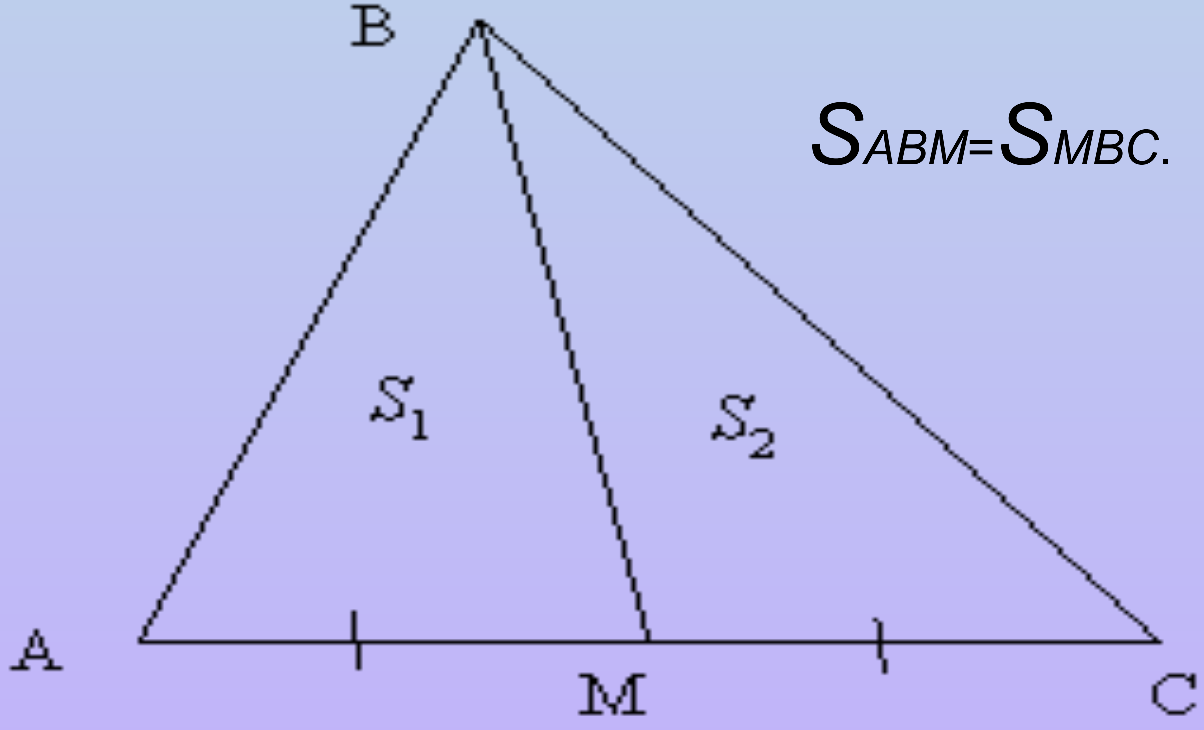
Площади треугольников, имеющих равные стороны, относятся как соответствующие этим сторонам высоты.

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta AEC} = BB_1 : EE_1.$$



Свойство №5

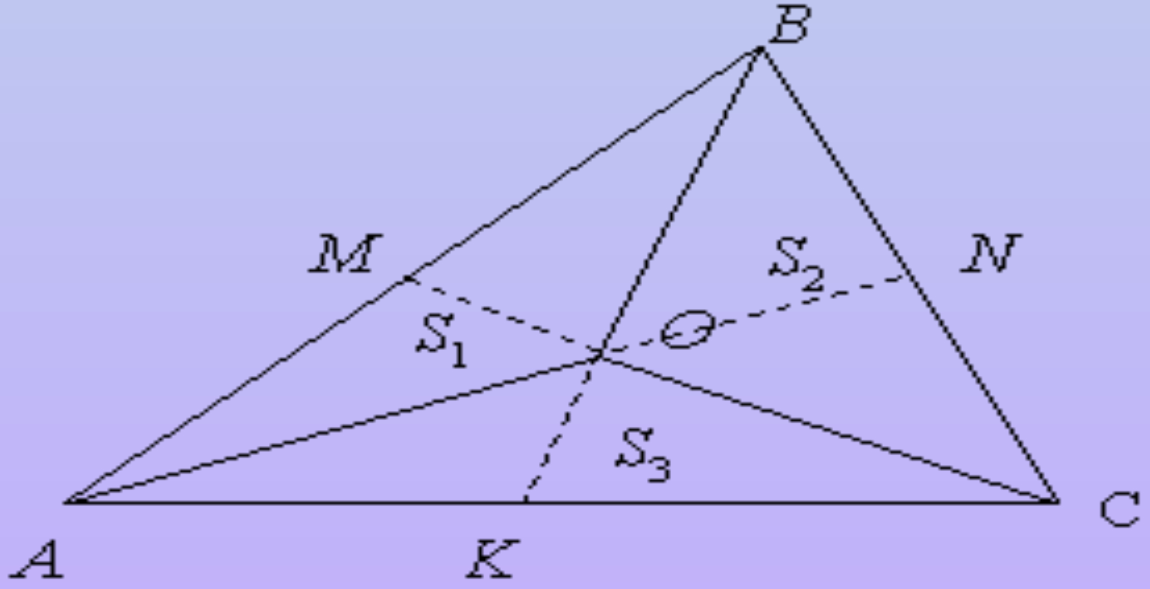
Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.



$S_{ABM} = S_{MBC}$.

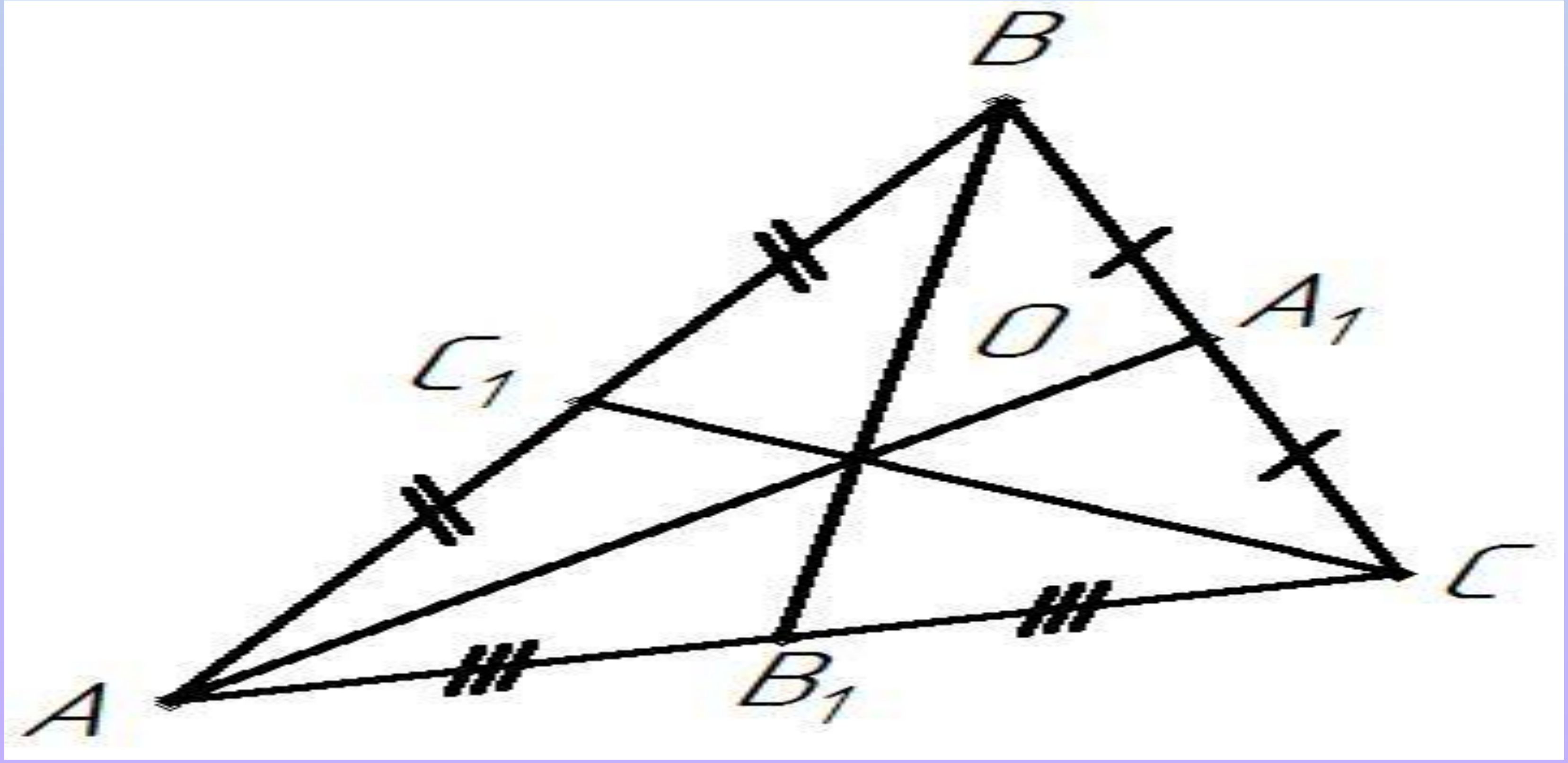
Свойство №6
1)Три медианы треугольника делят его на три равновеликих треугольника.

$S_{AOB}=S_{COB}=S_{AOC}$



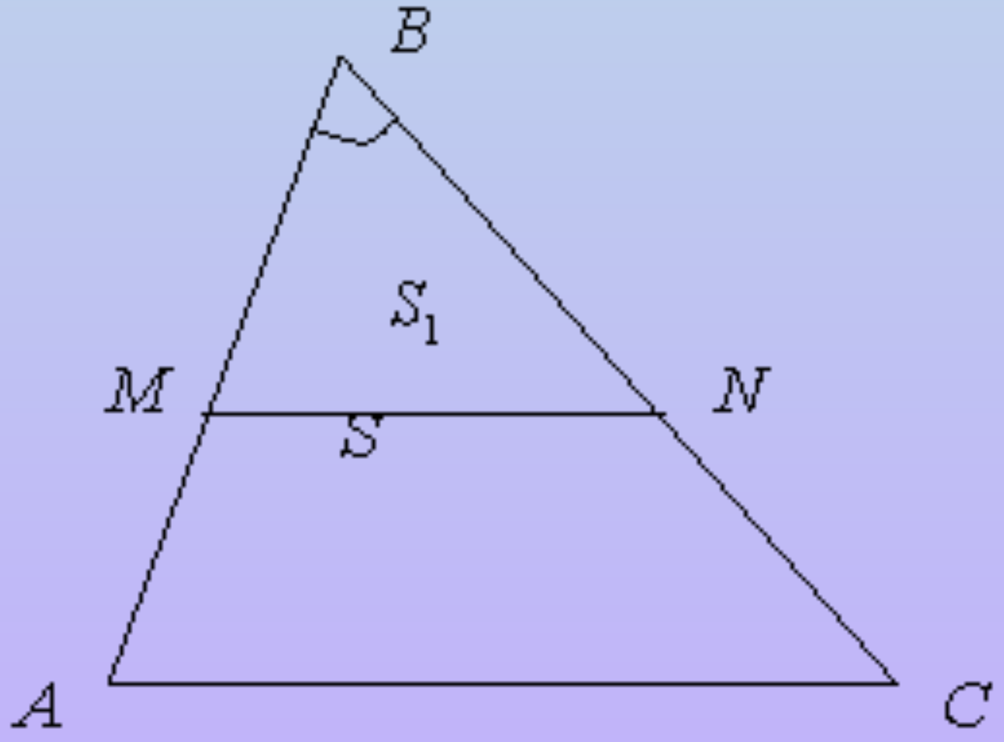
2)Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

$$S_{AOC_1} = S_{BOC_1} = S_{BOA_1} = S_{COA_1} = S_{COB_1} = S_{AOB_1}.$$



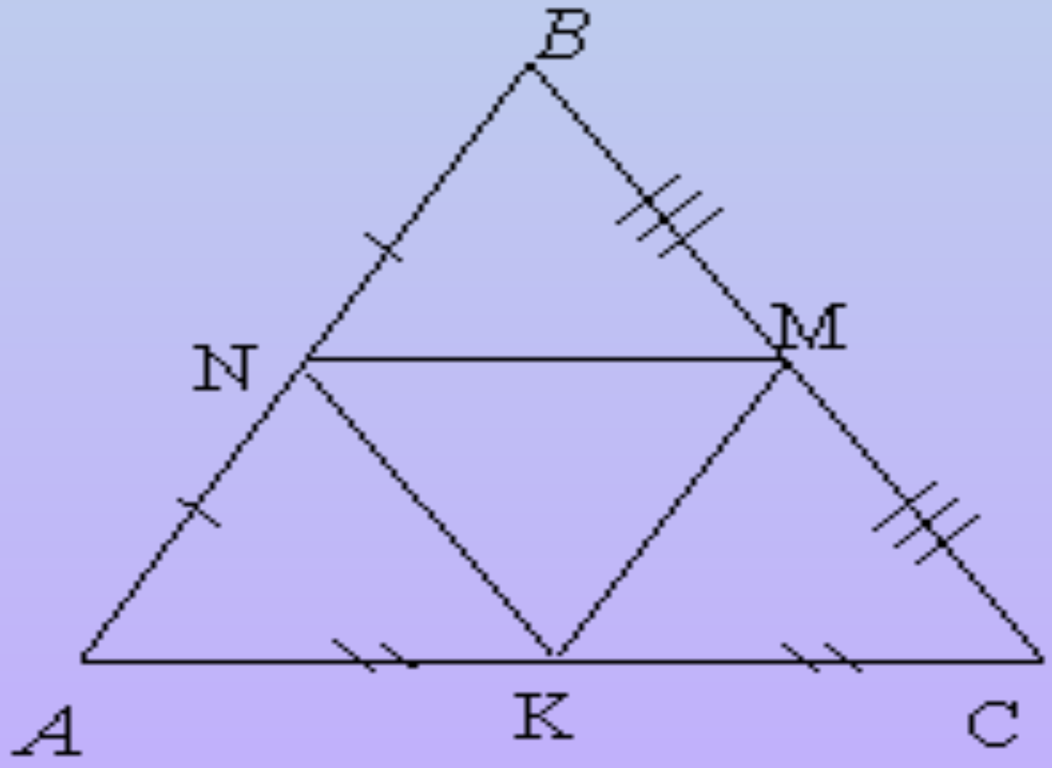
Свойство №7

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Свойство №8

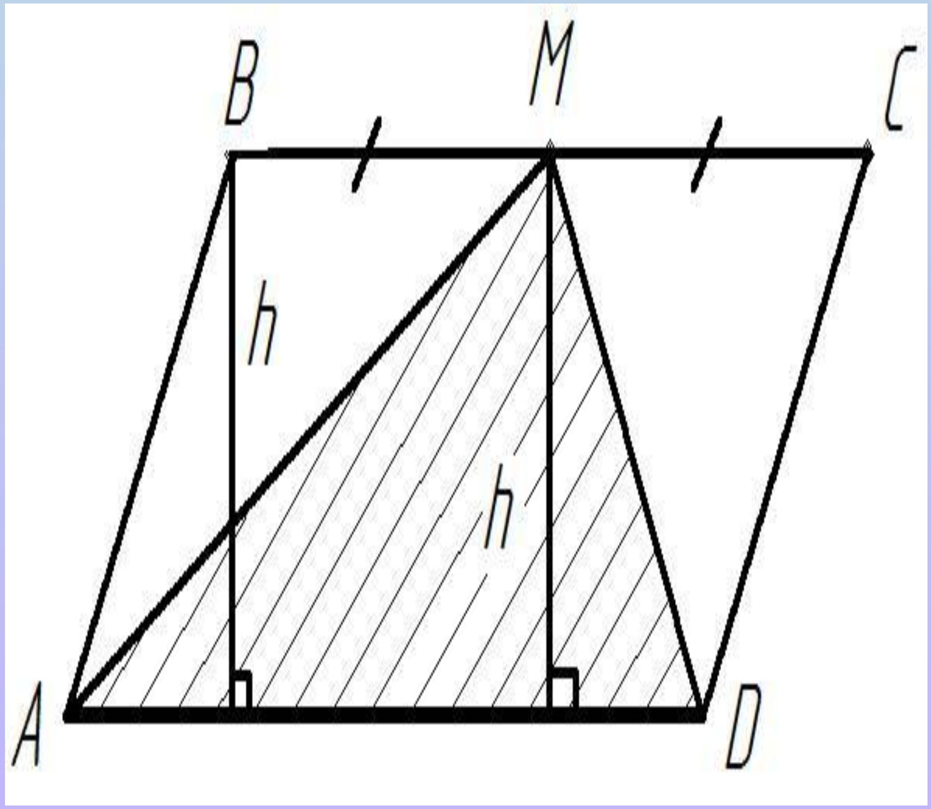
Средние линии треугольника площади S отсекают от него треугольники площади ¼ S .



Задача1

Дано: ABCD - параллелограмм, BM=MC, $S_{ABM}=4$

Найти: S_{AMD}



$$\frac{S_{\Delta AMD}}{S_{\Delta ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h\cdot AD}{h\cdot AD} = \frac{1}{2};$$

$S_{AMD}= ½\ S_{ABCD}$

$S_{ABM} = S_{CMD}$

$S_{ABM} + S_{CMD}= ½\ S_{ABCD} =8$

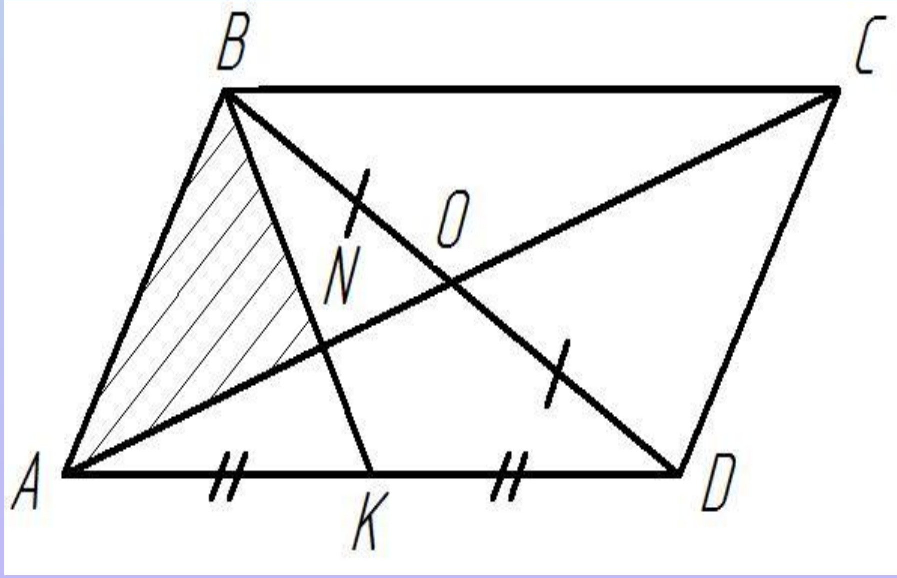
$S_{AMD}=8$

Задача 2

Дано: ABCD– параллелограмм, AK=KD

BK ∩ AC = N, $S_{ABCD} = 60.$

Найти: S_{ABN}



$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC} = 30,$$

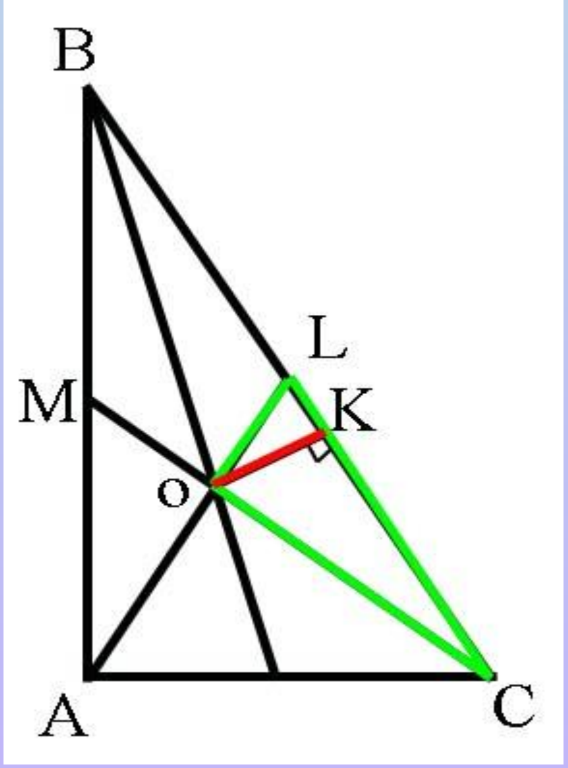
$$S_{\Delta ABN} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABD}.$$

(свойство №6 (1))

S_{ABN}=10

Задача 3

Найти расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его гипотенузы, равной 25 см, если один из катетов равен 20 см.



Дано: ΔABC (∠ A=90), BC=25см, AB=20см.

O - точка пересечения медиан,

OK ⊥ BC

Найти: OK.

Решение:

1. **ΔABC (∠ A=90). По теореме Пифагора AC=15.**

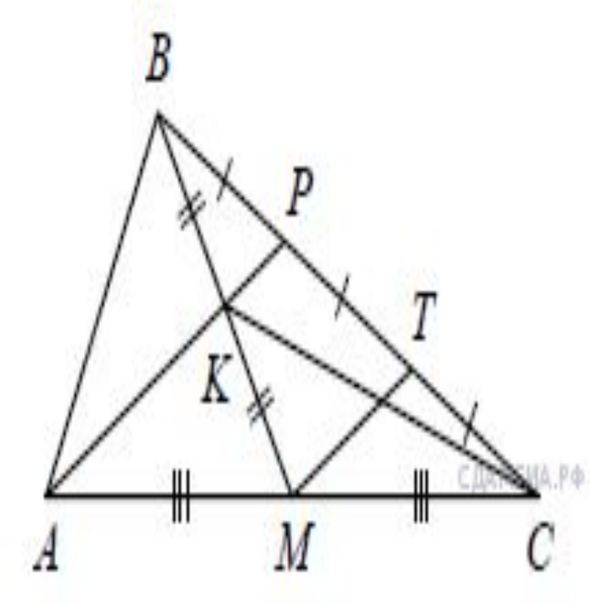
2. **O - точка пересечения медиан,** $S_{OLC} = S_{ABC} / 6$; (свойство №6 (2)) $S_{OLC} = 150/6$; $S_{OLC} = 25$

3. **С другой стороны** $S_{OLC} = 1/2 LC \cdot OK$; $OK = 2 S_{OLC} / LC$; **OK = 4 см.**

Ответ: 4см.

__Задача 4__

Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника KPCM.



Решение.

Проведём отрезок *MT*, параллельный *AP*. Тогда *MT* — средняя линия треугольника *APC* и *CT = TP*, а *KP* — средняя линия треугольника *BMT* и *TP = BP*.

Обозначим площадь треугольника B*KP* через S . Тогда $S_{\Delta KPC}$ =2S, т.к. треугольник *KPC*, имеет ту же высоту и вдвое больше основание.

Значит, $S_{\Delta CKB} = S_{\Delta CKM} = 3S$ (CK – медиана треугольника CMB).

$S_{\Delta CKM} = S_{\Delta AKM} = 3S$ (KM– медиана треугольника AKC). $S_{\Delta ABK} = S_{\Delta AKM} = 3S$ (AK – медиана треугольника AMB).

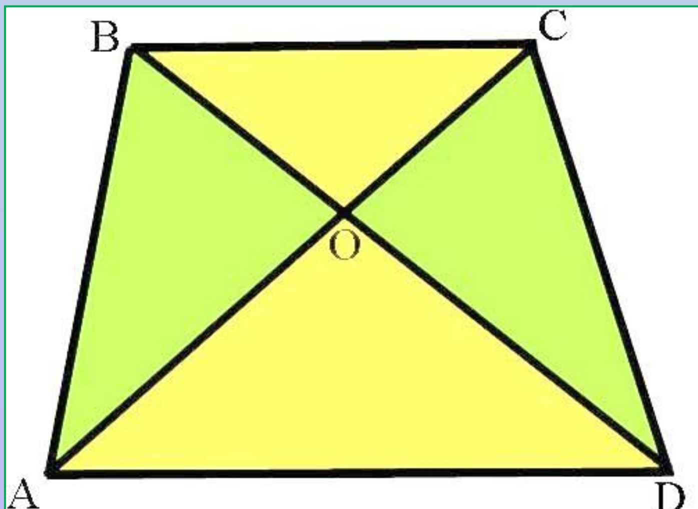
Итак, $S_{KPCM} = S_{\Delta CKM} + S_{\Delta KPC} = 5S$. $S_{\Delta ABK} = 3S$

Значит, $S_{\Delta ABK} : S_{KPCM} = 3:5 = 0,6$

Ответ: 0,6.

Утверждение 1

В четырехугольнике ABCD стороны AD и BC параллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABO и CDO равновелики (O – точка пересечения диагоналей четырехугольника).



Дано: $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}$.

Доказать: $AD \parallel BC$.

Доказательство.

1. Т. к. $S_{\Delta AOB}=1/2 OA\cdot OB\cdot \sin\angle AOB$ и $S_{\Delta COD}=1/2 OC\cdot OD\cdot \sin\angle COD$, то $OA\cdot OB\cdot \sin\angle AOB=OC\cdot OD\cdot \sin\angle COD$.

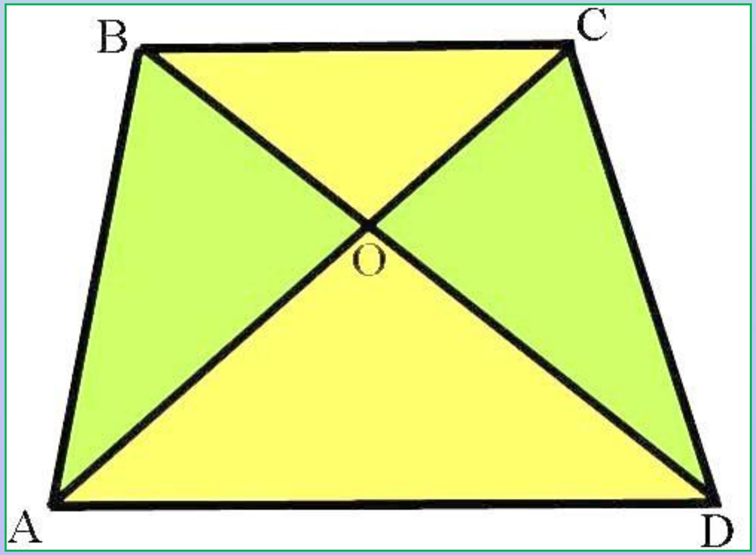
$AO\cdot BO=CO\cdot DO$; т.е. $AO:OC=DO:OB$.

2. $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (по 2 признаку подобия: $AO:OC=DO:OB$ и $\angle AOB = \angle BOC$ как вертикальные).

Значит, $\angle BCO=\angle OAD$.

3. Т.к. $\angle BCO=\angle OAD$ и они накрест-лежащие при прямых AD и BC и секущей AC, то $AD \parallel BC$.

Обратное утверждение



Дано: $AD \parallel BC$.

Доказать: $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$.

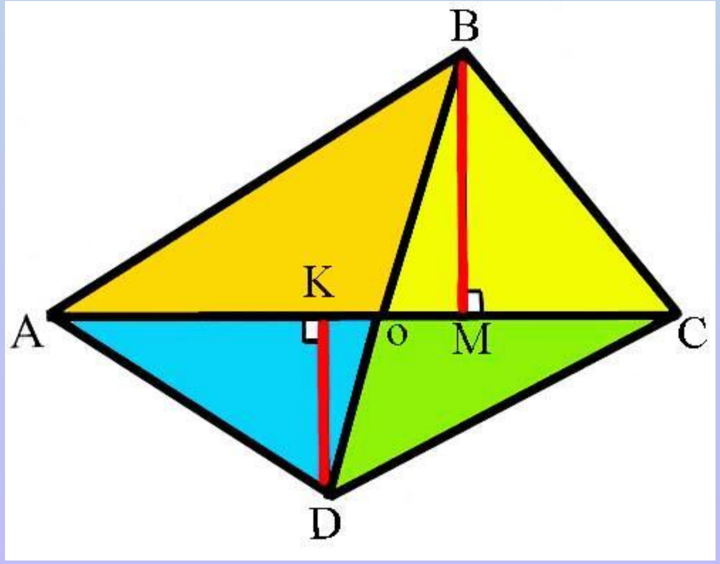
Доказательство.

1. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BOC}$, и $S_{\Delta COD} = S_{\Delta DBC} - S_{\Delta BOC}$.
2. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}$, т. к. они имеют одно и то же основание BC, а опущенные на него высоты равны, поскольку $AD \parallel BC$.

Значит, $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$.

Утверждение 2

В выпуклом четырехугольнике ABCD выполняется равенство $S_{\Delta AOB} \cdot S_{\Delta COD} = S_{\Delta AOD} \cdot S_{\Delta BOC}$ (O – точка пересечения диагоналей) .



Доказательство.

1. ΔAOB и Δ BOC имеют общую высоту BM.

Поэтому : $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta BOC} = AO:OC$

2. Аналогично:

$S_{\Delta AOD} : S_{\Delta COD} = AO:OC.$

3. Из этих двух равенств следует, что

$S_{\Delta AOB} : S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOD} : S_{\Delta COD}$, или

$S_{\Delta AOB} \cdot S_{\Delta COD} = S_{\Delta AOD} \cdot S_{\Delta BOC}$

В случае, если AD║BC

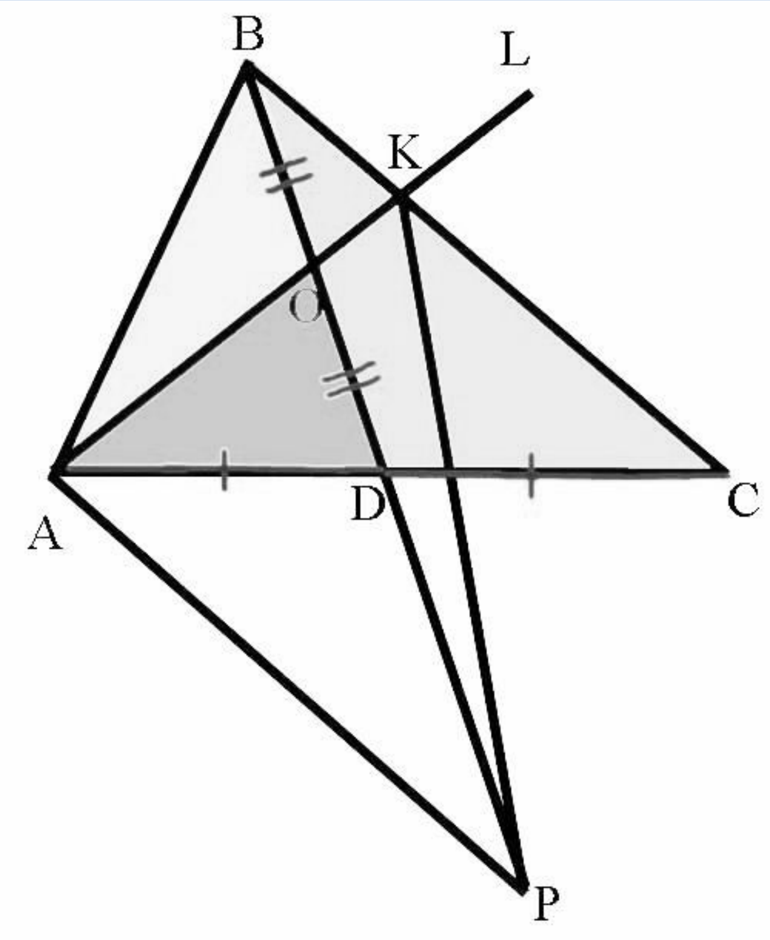
$S^2_{\Delta AOB} = S^2_{\Delta COD} = S_{\Delta AOD} \cdot S_{\Delta BOC}$ или

$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD} = \sqrt{S_{\Delta AOD}}\sqrt{S_{\Delta BOC}}$

$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} = (\sqrt{S_{\Delta AOD}} + \sqrt{S_{\Delta BOC}})^2$

Задача 5

В треугольнике ABC проведена медиана BD , а через её середину и вершину A проведена прямая AL. В результате такого построения треугольник ABC разбит на три треугольника и один четырехугольник. Найти площади этих фигур, если площадь ABC равна 60.



Решение:

1. Так как BD – медиана, то $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta CBD}=0,5S_{\Delta ABC}=30$;

2. AO – медиана в треугольнике ABD, поэтому $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOD}=0,5S_{\Delta ABD}=15$.

3. Продолжим медиану BD за точку D так, что DP=BD. Рассмотрим четырехугольник ABKP. По построению, BD=DP, тогда $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ADP}=30$.

4. Точка D стала точкой пересечения диагоналей четырехугольника ABCP, в которой они делятся пополам. Тогда ABCP – параллелограмм, т.е. AP║BK.

5. Значит, $S_{\Delta POK}=S_{\Delta AOB}=15$.

6. В силу утверждения 2 можем заключить, что $S^2_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOP}\cdot S_{\Delta BOK}$.

Заметим, что $S_{\Delta AOP}=3S_{\Delta AOB}=3\cdot 15=45$, $225=45\cdot S_{\Delta BOK}$, откуда $S_{\Delta BOK}=5$.

Тогда $S_{OKCD}=60–30–5=25$

Ответ: $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOD}=15$; $S_{\Delta BOK}=5$; $S_{OKCD}=25$

Задача 6

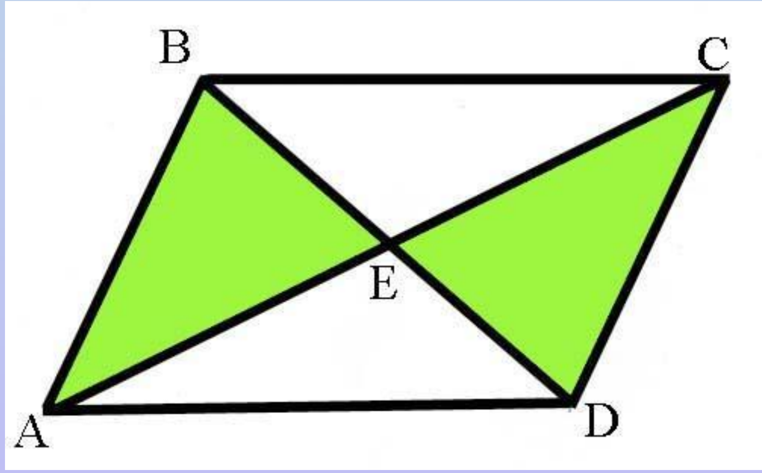
Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке E, $S_{ABE}=S_{CED}$. Площадь четырёхугольника ABCD больше площади треугольника ABE не более чем в 4 раза. Найти CD, если AB = $\sqrt{7}$

Решение.

1. Так как $S_{\Delta ABE}=S_{\Delta CED}$, тогда по утверждению 1 AD $\parallel$ BC.

2. Пусть $S_{\Delta AED}=S_1$, $S_{\Delta BEC}=S_2$.

Из утверждения 2 следует, что $S_{\Delta ABE}=S_{\Delta CED}=\sqrt{S_1 S_2}$.



3. Так как $\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ABE}} \le 4, т.е. \frac{\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2}{\sqrt{S_1 S_2}} \le 4 \quad \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}+2 \le 4$

Значит,

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+\sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \le 2$$

4. Равенство имеет место только в том случае, когда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}=\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}=1, т.е. S_1=S_2$$

5.Значит, в силу утверждения1, заключаем, что AB $\parallel$ CD. Тогда ABCD – параллелограмм и CD=AB=$\sqrt{7}$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!