Методы решения смешанных уравнений

Стандартные методы

В вариантах ЕГЭ довольно часто встречаются стандартные иррациональные уравнения вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x),$$

которые вполне могут быть решены одним из двух стандартных способов - переходом к

равносильной системе $\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

или возведением в квадрат обеих частей уравнения и последующей проверкой.

Решите уравнение

$$\sqrt{7-2x}+2=x$$

*1 способ (**Равносильные преобразования**)*

$$\sqrt{7-2x}+2=x,$$

$$\sqrt{7-2x}=x-2,$$

$$\begin{cases} 7-2x=(x-2)^2, \\ x-2\geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7-2x=x^2-4x+4, \\ x\geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x\geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=3, \end{array}\right. \\ x\geq 2, \end{cases}$$

$$x=3.$$

2 способ **(Проверка)**

Перейдём к уравнению-следствию.

$$\sqrt{7-2x}+2=x,$$

$$\sqrt{7-2x}=x-2,$$

$$7-2x=\left(x-2\right)^2,$$

$$7-2x=x^2-4x+4,$$

$$x^2-2x-3=0,$$

$$x_1=-1,$$

$$x_2=3.$$

Проверим, являются ли найденные значения переменной корнями исходного уравнения.

При $x=-1$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{7+2}=-1-2$$

Равенство неверно, следовательно, найденное значение не является корнем исходного уравнения.

При $x=3$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{7-6}=3-2$$

Равенство верно, следовательно, число 3 – корень данного уравнения.

Однако, данные способы решения всё-таки отнимают некоторое время, что при решении задач Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) может быть довольно важным. Следует отметить, что задачи подобного типа встречаются, как правило, в первой части, то есть представляют из себя задачи с кратким ответом. Значит, подробное решение задачи не требуется. Отсюда возникает ещё один способ – «угадать» решение.

3 способ(**Использование монотонности**)

$$\sqrt{7-2x}+2=x,$$
$$\sqrt{7-2x}=x-2.$$

Заметим, что левая часть уравнения представляет из себя убывающую на всей области определения функцию, а правая часть – возрастающую функцию. Отсюда следует вывод, что если решение есть – то оно единственное. Это решение несложно подобрать $x=3$.

Использование монотонности функций

Как было показано в предыдущем примере, уравнение вида $f(x)=g(x)$ будет иметь не более одного корня, если левая часть представляет из себя монотонно возрастающую функцию, а правая – монотонно убывающую.

Решите уравнение $\log_6(x-3)+\log_6(x-19)=2$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответ запишите их сумму.

Левая часть уравнения представляет из себя монотонно возрастающую функцию, правая – постоянное число. Значит, если решение есть – то оно единственное. Несложным подбором убеждаемся, что это число 21.

В рассмотренном выше примере видно, что «метод угадывания» значительно сокращает временные затраты на решение. Кроме того, он, по существу, включает в себя метод проверки (ведь угаданный корень необходимо подставить в уравнение). Ну и немаловажно отметить, что, как указано в инструкции по выполнению работы ЕГЭ: «Ответом в заданиях 1-12 является целое число или число, записанное в виде десятичной дроби». Следовательно, ответ надо искать среди целых чисел, ну а, учитывая, что в приведённом примере участвовал логарифм по основанию 6 – ответ становится очевиден.

Метод оценок (мажорант)

Иногда уравнение вида $f(x) = g(x)$ устроено так, что левая и правая части представляют из себя ограниченные функции. В этом случае можно (а иногда и единственно возможно) применить метод «оценивания» правой и левой частей. Особенно этот метод полезен при решении так называемых «смешанных» уравнений. Проиллюстрируем это на примере.

Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}\left(1+\left(x^2-3x+2\right)^2\right)=\sqrt{x^2-6x+8}$

Стандартным путем решить это уравнение невозможно. Обратим внимание на то, что в левой части под логарифмом выражение всегда больше либо равно единицы, логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{3}$ - убывающая, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(1+\left(x^2-3x+2\right)^2\right)\le\log_{\frac{1}{3}}1=0$$

То есть – левая часть всегда меньше или равна нулю. В правой же части – арифметический квадратный корень, который всегда больше или равен нулю. Отсюда получаем, что равенство возможно когда обе части уравнения обращаются в нуль. Левая часть равна нулю при $x=1$ и при $x=2$, а правая – при $x=2$ и $x=4$. Отсюда – единственное решение $x=2$.

При решении подобных уравнений особенно стоит   отметить выделение квадрата двучлена в одной или в обеих частях уравнения.

Решите уравнение $x^2+12x+38=\sqrt{\cos\frac{\pi x}{3}+3}$

Преобразуем левую часть уравнения.

$$x^2+12x+38=x^2+12x+36+2=(x+6)^2+2\geq 2$$

Преобразуем правую часть уравнения.

$$\sqrt{\cos\frac{\pi x}{3}+3}\leq\sqrt{1+3}=2$$

Значит, равенство возможно только тогда, когда обе части уравнения принимают значение 2. Левая часть равна двум только при $x=-6$. Проверкой убеждаемся, что и правая часть при этом значении переменной равна двум. Таким образом, ответ - 6 .

Стоит отметить, что так как это задание первой части ЕГЭ , то ответ обязательно должен быть и притом единственный, так что подставлять число -6 в правую часть не совсем обязательно.

Решите уравнение $\sqrt{2x^2-11x-6}+\sqrt{\log_5\left(2x^2-21x+55\right)}=0$

Правая часть уравнения – постоянное число, левая часть – сумма двух квадратных корней. Так как значения арифметического квадратного корня неотрицательны, то для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы оба квадратных корня были равны нулю. Решив квадратное уравнение $2x^2-11x-6=0$, получим $x_1=6; x_2=-0{,}5$ Проверкой убеждаемся, что первый корень обращает в нуль второе слагаемое, а второй – нет. Отсюда, ответ - $x=6$.

Решите уравнение $2^{x}+2^{-x}=2\cos\frac{x}{3}$

Можно выделить полный квадрат в левой части уравнения

$$2^{x}+2^{-x}=2^{x}+\frac{1}{2^{x}}=\frac{2^{2x}+1}{2^{x}}=\frac{2^{2x}-2\cdot 2^{x}+1+2\cdot 2^{x}}{2^{x}}=\frac{\left(2^{x}-1\right)^{2}}{2^{x}}+\frac{2\cdot 2^{x}}{2^{x}}=\frac{\left(2^{x}-1\right)^{2}}{2^{x}}+2\geq 2$$

Правая же часть, в свою очередь, меньше либо равна двум. Отсюда получаем, что равенство возможно только тогда, когда обе части уравнения принимают значение, равное двум. Левая часть равна двум только при $x=0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x=0$ и правая часть также равна двум. Таким образом, ответ - $x=0$.

Решите уравнение $3^{1-2x-x^2} = \cos \pi x + 10$

Снова поможет выделение полного квадрата, на этот раз – в показателе степени.

$$1-2x-x^2 = -\left(x^2+2x-1\right) = -\left(x^2+2x+1-2\right) = 2-\left(x+1\right)^2 \le 2$$

$$3^{1-2x-x^2} \le 3^2 = 9$$

В свою очередь, правая часть уравнения не может быть меньше девяти. Отсюда получаем, что единственный ответ - $x = -1$.

Графический метод

Для решения некоторых уравнений полезно привлекать графические иллюстрации и соображения.

Решите уравнение $5^x - 3^x = 98$

$$5^x = 3^x + 98$$

Функция $f(x) = 5^x$ возрастает на R. Функция $g(x) = 3^x + 98$ также возрастает на R , но «скорость» её роста меньше, чем «скорость» роста $y(x)$. Объяснение этому факту возможно, например с использованием производной - $f^{\prime}(x) > g^{\prime}(x)$. Кроме того, $f(0) = 1;\ g(0) = 99$. То есть $f(0) < g(0)$. Значит, если точка пересечения существует, то она – единственная. Подбором убеждаемся, что $x = 3$.

Использование области определения

Иногда полезно найти область определения уравнения – если «повезёт», то, может быть, она будет состоять из конечного множества точек, среди которых можно отыскать ответ просто проверкой – подставив в исходное уравнение.

Решите уравнение

$$4\sqrt{x-2}+\sqrt{x}=\sqrt{2x-x^2}+2\sin\frac{\pi x}{8}$$

Найдём область определения уравнения (или, как часто говорят – ОДЗ – область допустимых значений переменных, входящих в уравнение). Арифметический квадратный корень определен для неотрицательных подкоренных выражений, следовательно:

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ 2x-x^2\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ x(x-2)\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$$x=2$$

Таким образом, единственное допустимое значение $x=2$. Проверкой убеждаемся, что это значение является корнем исходного уравнения.

Решите самостоятельно следующие уравнения .

1. $\log_{36}(x-4)+\log_{36}(x-20)=1$

2. $\sqrt{x-3}\sqrt{x-19}=6$

3. $5^{x^2-2\text{ч}+2}=4-\cos\pi x$

4. $(4x^2-7x-2)^2+\log_5^2(2x^2-11x+15)=0$

5. $x^2-16x+67=\sqrt{\sin\frac{\pi x}{16}+8}$