



5



7



3



Методы решения смешанных уравнений

Стандартные методы

В вариантах ЕГЭ довольно часто встречаются стандартные иррациональные уравнения вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x),$$

которые вполне могут быть решены одним из двух стандартных способов - переходом к

равносильной системе
$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

или возведением в квадрат обеих частей уравнения и последующей проверкой.



5



7



3





5



7



3



Решите уравнение

$$\sqrt{7-2x} + 2 = x$$

1 способ (Равносильные преобразования)

$$\sqrt{7-2x} + 2 = x,$$

$$\sqrt{7-2x} = x - 2,$$

$$\begin{cases} 7 - 2x = (x - 2)^2, \\ x - 2 \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 2x = x^2 - 4x + 4, \\ x \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1, \\ x = 3, \\ x \geq 2, \end{cases}$$

$$x = 3.$$



2 способ (Проверка)

Перейдём к уравнению-следствию.

$$\sqrt{7 - 2x} + 2 = x,$$

$$\sqrt{7 - 2x} = x - 2,$$

$$7 - 2x = (x - 2)^2,$$

$$7 - 2x = x^2 - 4x + 4,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = 3.$$

5



7



3





5



7



3



Проверим, являются ли найденные значения переменной корнями исходного уравнения.

При $x = -1$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{7+2} = -1-2$$

Равенство неверно, следовательно, найденное значение не является корнем исходного уравнения.

При $x = 3$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{7-6} = 3-2$$

Равенство верно, следовательно, число 3 — корень данного уравнения.



5



7



3



Однако, данные способы решения всё-таки отнимают некоторое время, что при решении задач Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) может быть довольно важным. Следует отметить, что задачи подобного типа встречаются, как правило, в первой части, то есть представляют из себя задачи с кратким ответом. Значит, подробное решение задачи не требуется. Отсюда возникает ещё один способ – «угадать» решение.

3 способ (Использование монотонности)

$$\sqrt{7 - 2x} + 2 = x,$$

$$\sqrt{7 - 2x} = x - 2.$$

Заметим, что левая часть уравнения представляет из себя убывающую на всей области определения функцию, а правая часть – возрастающую функцию. Отсюда следует вывод, что если решение есть – то оно единственное. Это решение несложно подобрать $x = 3$.



5



7



3





5



7



3



Использование монотонности функций

Как было показано в предыдущем примере, уравнение вида $f(x) = g(x)$ будет иметь не более одного корня, если левая часть представляет из себя монотонно возрастающую функцию, а правая – монотонно убывающую.



5



7



3



Решите уравнение $\log_6(x-3) + \log_6(x-19) = 2$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответ запишите их сумму.

Левая часть уравнения представляет из себя монотонно возрастающую функцию, правая – постоянное число. Значит, если решение есть – то оно единственное. Несложным подбором убеждаемся, что это число 21.



5



7



3



В рассмотренном выше примере видно, что «метод угадывания» значительно сокращает временные затраты на решение. Кроме того, он, по существу, включает в себя метод проверки (ведь угаданный корень необходимо подставить в уравнение). Ну и немаловажно отметить, что, как указано в инструкции по выполнению работы ЕГЭ: «Ответом в заданиях 1-12 является целое число или число, записанное в виде десятичной дроби». Следовательно, ответ надо искать среди целых чисел, ну а, учитывая, что в приведённом примере участвовал логарифм по основанию 6 – ответ становится очевиден.



Метод оценок (мажорант)

Иногда уравнение вида $f(x) = g(x)$

устроено так, что левая и правая части представляют из себя ограниченные функции. В этом случае можно (а иногда и единственно возможно) применить метод «оценивания» правой и левой частей. Особенно этот метод полезен при решении так называемых «смешанных» уравнений.

Проиллюстрируем это на примере.

5



7



3





Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(1 + (x^2 - 3x + 2)^2 \right) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$$

Стандартным путем решить это уравнение невозможно. Обратим внимание на то, что в левой части под логарифмом выражение всегда больше либо равно единицы, логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{3}$ - убывающая, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(1 + (x^2 - 3x + 2)^2 \right) \leq \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

5



7



3





5



7



3



То есть – левая часть всегда меньше или равна нулю. В правой же части – арифметический квадратный корень, который всегда больше или равен нулю. Отсюда получаем, что равенство возможно когда обе части уравнения обращаются в нуль. Левая часть равна нулю при $x=1$ и при $x=2$, а правая – при $x=2$ и $x=4$. Отсюда – единственное решение $x=2$.

При решении подобных уравнений особенно стоит отметить выделение квадрата двучлена в одной или в обеих частях уравнения.



Решите уравнение

$$x^2 + 12x + 38 = \sqrt{\cos \frac{\pi x}{3} + 3}$$

Преобразуем левую часть уравнения.

$$x^2 + 12x + 38 = x^2 + 12x + 36 + 2 = (x + 6)^2 + 2 \geq 2$$

Преобразуем правую часть уравнения.

$$\sqrt{\cos \frac{\pi x}{3} + 3} \leq \sqrt{1 + 3} = 2$$

Значит, равенство возможно только тогда, когда обе части уравнения принимают значение 2. Левая часть равна двум только при $x = -6$. Проверкой убеждаемся, что и правая часть при этом значении переменной равна двум. Таким образом, ответ - 6.

Стоит отметить, что так как это задание первой части ЕГЭ, то ответ обязательно должен быть и притом единственный, так что подставлять число -6 в правую часть не совсем обязательно.

5



7



3





5



7



3



Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 11x - 6} + \sqrt{\log_5(2x^2 - 21x + 55)} = 0$

Правая часть уравнения – постоянное число, левая часть – сумма двух квадратных корней.

Так как значения арифметического квадратного корня неотрицательны, то для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы оба квадратных корня были равны нулю. Решив квадратное

уравнение $2x^2 - 11x - 6 = 0$, получим $x_1 = 6; x_2 = -0,5$

Проверкой убеждаемся, что первый корень обращает в нуль второе слагаемое, а второй – нет. Отсюда, ответ - $x = 6$.



Решите уравнение

$$2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3}$$

Можно выделить полный квадрат в левой части уравнения

$$2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{2^{2x} + 1}{2^x} = \frac{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 + 2 \cdot 2^x}{2^x} = \frac{(2^x - 1)^2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x} = \frac{(2^x - 1)^2}{2^x} + 2 \geq 2$$

Правая же часть, в свою очередь, меньше либо равна двум. Отсюда получаем, что равенство возможно только тогда, когда обе части уравнения принимают значение, равное двум.

Левая часть равна двум только при $x = 0$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x = 0$ и правая часть также равна двум.

Таким образом, ответ - $x = 0$.

5



7



3





Решите уравнение $3^{1-2x-x^2} = \cos \pi x + 10$

Снова поможет выделение полного квадрата,
на этот раз – в показателе степени.

$$1-2x-x^2 = -(x^2+2x-1) = -(x^2+2x+1-2) = 2-(x+1)^2 \leq 2$$
$$3^{1-2x-x^2} \leq 3^2 = 9$$

В свою очередь, правая часть уравнения не
может быть меньше девяти. Отсюда
получаем, что единственный ответ - $x = -1$.

5



7



3





5



7



3



Графический метод

Для решения некоторых уравнений полезно привлечь графические иллюстрации и соображения.



Решите уравнение

$$5^x - 3^x = 98$$

$$5^x = 3^x + 98$$

Функция $f(x) = 5^x$ возрастает на \mathbb{R} . Функция также возрастает на \mathbb{R} , но «скорость» её роста меньше, чем «скорость» роста $g(x) = 3^x + 98$.

Объяснение этому факту возможно, например с использованием производной - Кроме того, $f'(x) > g'(x)$. То есть $f'(x) > g'(x)$.

Значит, если точка пересечения существует, то она – единственная. Подбором убеждаемся, что $x = 3$.

$$x = 3$$

5



7



3





5



7



3



Использование области определения

Иногда полезно найти область определения уравнения – если «повезёт», то, может быть, она будет состоять из конечного множества точек, среди которых можно отыскать ответ просто проверкой – подставив в исходное уравнение.



Решите уравнение

$$4\sqrt{x-2} + \sqrt{x} = \sqrt{2x-x^2} + 2\sin\frac{\pi x}{8}$$

Найдём область определения уравнения (или, как часто говорят – ОДЗ – область допустимых значений переменных, входящих в уравнение).

Арифметический квадратный корень определен для неотрицательных подкоренных выражений, следовательно:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x(x-2) \leq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Таким образом, единственное допустимое значение $x=2$. Проверкой убеждаемся, что это значение является корнем исходного уравнения.

5



7



3





5



7



3



Решите самостоятельно следующие уравнения .

1. $\log_{36}(x-4) + \log_{36}(x-20) = 1$

2. $\sqrt{x-3}\sqrt{x-19} = 6$

3. $5^{x^2-2x+2} = 4 - \cos \pi x$

4. $(4x^2 - 7x - 2)^2 + \log_5^2(2x^2 - 11x + 15) = 0$

5. $x^2 - 16x + 67 = \sqrt{\sin \frac{\pi x}{16} + 8}$