

# АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

9 класс

# Устная работа

- Последовательность  $(x_n)$  задана формулой:  $x_n = n^2$ .
- Какой номер имеет член этой последовательности, если он равен 144? 225? 100?

$$144 = 12^2 = x_{12} \quad 225 = x_{15}, \quad 100 = x_{10}$$

- Являются ли членами этой последовательности числа 48? 49? 168?

**48 и 168 не являются членами последовательности,  
49 – является.**

# Устная работа

- О последовательности  $(u_n)$  известно, что  $u_1=2$ ,  
 $u_{n+1}=3u_n+1$ .

- Как называется такой способ задания последовательности? **Рекуррентный способ.**

- Найдите первые четыре члена этой последовательности.

$$u_1=2$$

$$u_2=3u_1+1=7$$

$$u_3=3u_2+1=22$$

$$u_4=3u_3+1=67$$

# Устная работа

- О последовательности  $(a_n)$  известно, что  $a_n = (n-1)(n+4)$

- Как называется такой способ задания последовательности? **Формулой  $n$ -ого члена.**

- Найдите  $n$ , если  $a_n = 150$  ?

**Заметим, что в формуле  $n$ -ого члена множители отличаются друг от друга на 5.**

$$150 = (n-1)(n+4)$$

$$150 = 10 \cdot 15$$

$$n = 11$$

# Что такое ПРОГРЕССИИ



- Термин «прогрессия» имеет латинское происхождение (progression), что означает «движение вперед» и был введен римским автором **Боэцием** (VI в.).
- Этим термином в математике прежде именовали всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. В настоящее время термин «прогрессия» в первоначально широком смысле не употребляется.
- Два важных частных вида прогрессий – арифметическая и геометрическая – сохранили свои названия.

# БОЭЦИЙ

- Аниций Манлий Торкват Северин Боэций, в исторических документах Аниций Манлий Северин (ок.480 — 524 (526)), один из наиболее авторитетных государственных деятелей своего времени, знаток и ценитель греческой и римской античности, философ-неоплатоник, теоретик музыки, христианский теолог.
- Помимо богословских трудов в трактатах по дисциплинам квадривия — арифметике («De institutione arithmetica») и музыке («De institutione musica») — передал европейской цивилизации метод и базовые знания лучших греческих авторов (преимущественно пифагорейцев) в области «математических» наук.



Боэций (слева) на фреске Рафаэля «Афинская школа»

# Что общего в последовательностях?

● 2, 6, 10, 14, 18, .... 22, 26

● 11, 8, 5, 2, -1, .... -4, -7

● 5, 5, 5, 5, 5, .... 5, 5

- Найдите для каждой последовательности следующие два члена.

# Арифметическая прогрессия

- Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

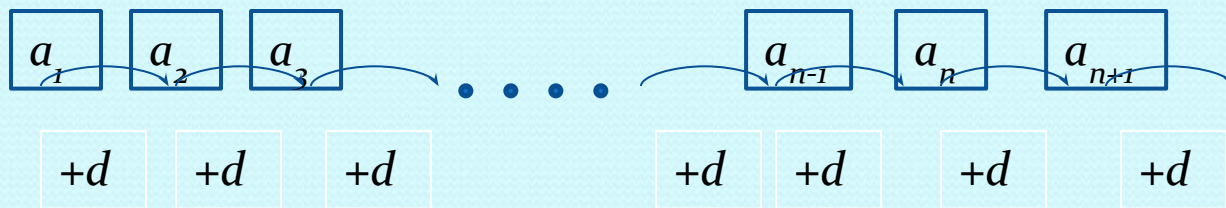
$(a_n)$  - арифметическая прогрессия,  
если  $a_{n+1} = a_n + d$ ,  
где  $d$ -некоторое число.



# Разность арифметической прогрессии

- Число  $d$ , показывающее, на сколько следующий член последовательности отличается от предыдущего, называется разностью прогрессии.

$$d = a_{n+1} - a_n$$



# Свойства прогрессии

- 2, 6, 10, 14, 18, ....       $d=4, a_{n+1} > a_n$
- 11, 8, 5, 2, -1, ....       $d=-3, a_{n+1} < a_n$
- 5, 5, 5, 5, 5, ....       $d=0, a_{n+1} = a_n$
  
- Если в арифметической прогрессии разность положительна ( $d > 0$ ), то прогрессия является возрастающей.
- Если в арифметической прогрессии разность отрицательна ( $d < 0$ ), то прогрессия является убывающей.
- В случае , если разность равна нулю ( $d=0$ ) и все члены прогрессии равны одному и тому же числу, последовательность называется стационарной.

# Задача

- На складе 1 числа было 50 тонн угля. Каждый день в течение месяца на склад приходит машина с 3 тоннами угля. Сколько угля будет на складе 30 числа, если в течение этого времени уголь со склада не расходовался.

- $a_1 = 50, d = 3$
- 1 числа: 50 т
- 2 числа: +1 машина (+3 т)
- 3 числа: +2 машины (+3·2 т)
- .....
- 30 числа: +29 машин (+3·29 т)
- $a_{30} = a_1 + 29d$   
 $a_{30} = 137$



# Формула n-ого члена

●  $a_1$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

# Пример 1.

- Последовательность  $(c_n)$ -арифметическая прогрессия. Найдите  $c_{81}$ , если  $c_1=20$  и  $d=3$ .

- Решение:

Воспользуемся формулой n-ого члена

$$c_{81} = c_1 + d(81-1),$$

$$c_{81} = 20 + 3 \cdot 80,$$

$$c_{81} = 260.$$

- Ответ: 260.

# Задача.

- В арифметической прогрессии четные члены оказались затёрты: 3, ..., 7, ..., 13...

Можно ли восстановить утраченные числа?

- Заметим, что  $a_3 = a_1 + 2d$ ,  $a_5 = a_3 + 2d$ ,  $a_7 = a_5 + 2d$  и т.д.  
Тогда  $d = (a_{n+2} - a_n) : 2$ , то есть  $d = 2$ .

- Искомая последовательность

3, 5, 7, 9, 13, 15, ...

- Можно ли найти пропущенные члены последовательности, не вычисляя разности?

# Характеристическое свойство арифметической прогрессии

- Пусть  $a_n$  – искомый член последовательности. Воспользуемся тем, что разность между соседними членами последовательности постоянна:

- $$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= a_{n+1} - a_n, \\ 2a_n &= a_{n-1} + a_{n+1}, \\ a_n &= (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой член этой последовательности, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов.

# №577 б

- Последовательность  $(c_n)$ - арифметическая прогрессия. Найдите  $c_{21}$ , если  $c_1=5,8$  и  $d=-1,5$ .

- Решение:

Воспользуемся формулой n-ого члена

$$c_{21} = c_1 + d(21-1),$$

$$c_{21} = 5,8 + (-1,5) \cdot 20,$$

$$c_{21} = -24,2.$$

- Ответ: -24,2.





# Задача.

- Числовая последовательность задана формулой  $a_n = 3 + 5n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
- Является ли эта последовательность арифметической прогрессией? Если да, то какова ее разность?

- Решение:

Поскольку  $a_{n+1} = 3 + 5(n+1) = 3 + 5n + 5 = a_n + 5$ , при всех значениях  $n$ , то последовательность является арифметической прогрессией по определению. Из полученной формулы  $a_{n+1} = a_n + 5$  разность этой прогрессии равна 5.



# Интересный факт

- Любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой  $a_n = kn + b$ , где  $k$  и  $b$  – некоторые числа.

$$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d)$$

- Последовательность  $(a_n)$ , заданная формулой вида  $a_n = kn + b$ , где  $k$  и  $b$  – некоторые числа, является арифметической прогрессией.

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b + kn - b = k$$

# Задача.

- Седьмой член арифметической прогрессии равен 1 и равен разности между четвертым и вторым членами. Найти первый член прогрессии.

- Дано:  $a_7=1, a_7=a_4-a_2.$

- Найти:  $a_1.$

- Решение: По условию  $a_7=a_4-a_2$ , то есть  $a_7=2d$ , но  $a_7=1$ , поэтому  $d=0,5$ .

$$a_7=a_1+6d,$$

$$a_1=a_7-6d,$$

$$a_1=1-6\cdot 0,5,$$

$$a_1=-2$$



# Домашнее задание:

- пункт 25,
- № 578а, № 580б, №582, №586а, №601а.

- **Творческое задание:**

Докажите, что в арифметической прогрессии для любых номеров, таких что  $k < n$ , выполняются

равенства

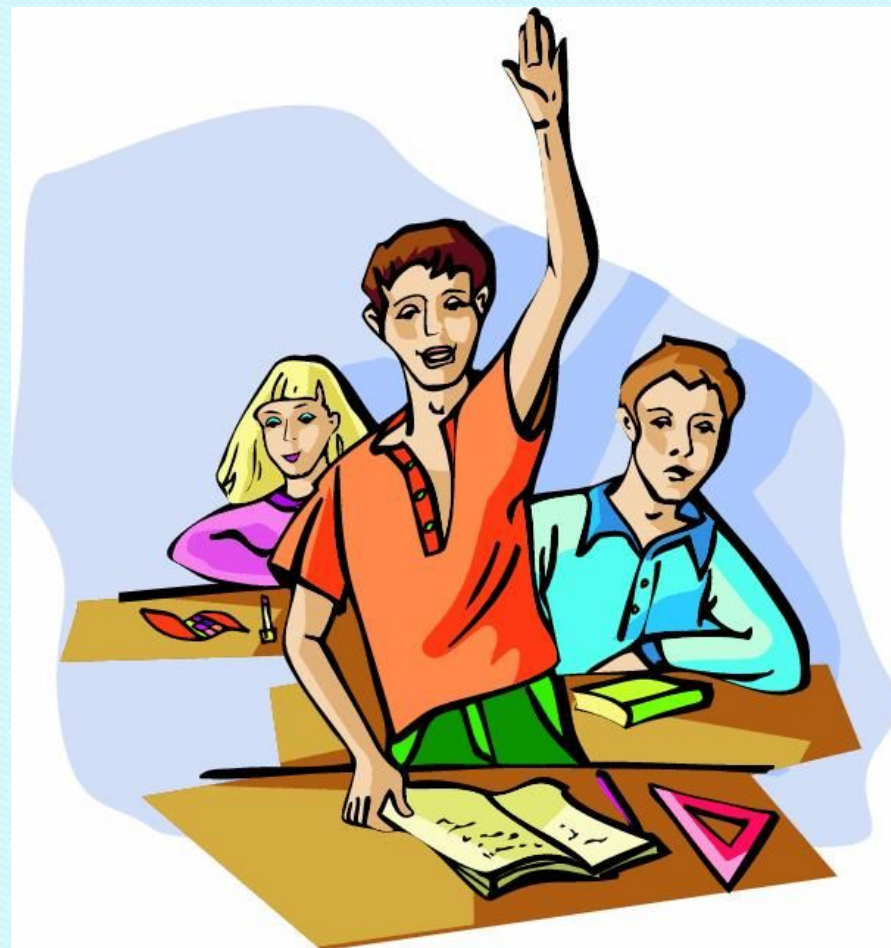
$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

и

$$d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$$



- Успехов в выполнении домашнего задания!



# Основные формулы:

- Рекуррентный способ задания арифметической прогрессии

$$a_{n+1} = a_n + d$$

- Разность прогрессии

$$d = a_{n+1} - a_n$$

- Формула  $n$ -ого члена

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

- Характеристическое свойство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

