

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

9 класс

Устная работа

- Последовательность (x_n) задана формулой: $x_n = n^2$.
- Какой номер имеет член этой последовательности, если он равен 144? 225? 100?

$$144 = 12^2 = x_{12} \quad 225 = x_{15}, \quad 100 = x_{10}$$

- Являются ли членами этой последовательности числа 48? 49? 168?

**48 и 168 не являются членами последовательности,
49 – является.**

Устная работа

- О последовательности (u_n) известно, что $u_1=2$,
 $u_{n+1}=3u_n+1$.

- Как называется такой способ задания последовательности? **Рекуррентный способ.**

- Найдите первые четыре члена этой последовательности.

$$u_1=2$$

$$u_2=3u_1+1=7$$

$$u_3=3u_2+1=22$$

$$u_4=3u_3+1=67$$

Устная работа

- О последовательности (a_n) известно, что $a_n = (n-1)(n+4)$

- Как называется такой способ задания последовательности? **Формулой n -ого члена.**

- Найдите n , если $a_n = 150$?

Заметим, что в формуле n -ого члена множители отличаются друг от друга на 5.

$$150 = (n-1)(n+4)$$

$$150 = 10 \cdot 15$$

$$n = 11$$

Что такое ПРОГРЕССИИ



- Термин «прогрессия» имеет латинское происхождение (progression), что означает «движение вперед» и был введен римским автором **Боэцием** (VI в.).
- Этим термином в математике прежде именовали всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. В настоящее время термин «прогрессия» в первоначально широком смысле не употребляется.
- Два важных частных вида прогрессий – арифметическая и геометрическая – сохранили свои названия.

БОЭЦИЙ

- Аниций Манлий Торкват Северин Боэций, в исторических документах Аниций Манлий Северин (ок.480 — 524 (526)), один из наиболее авторитетных государственных деятелей своего времени, знаток и ценитель греческой и римской античности, философ-неоплатоник, теоретик музыки, христианский теолог.
- Помимо богословских трудов в трактатах по дисциплинам квадривия — арифметике («De institutione arithmetica») и музыке («De institutione musica») — передал европейской цивилизации метод и базовые знания лучших греческих авторов (преимущественно пифагорейцев) в области «математических» наук.



Боэций (слева) на фреске Рафаэля «Афинская школа»

Что общего в последовательностях?

● 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26

● 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7

● 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

- Найдите для каждой последовательности следующие два члена.

Арифметическая прогрессия

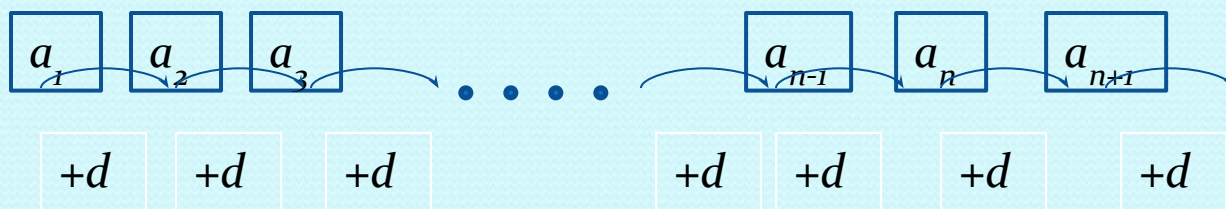
- Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

(a_n) - арифметическая прогрессия,
если $a_{n+1} = a_n + d$,
где d -некоторое число.

Разность арифметической прогрессии

- Число d , показывающее, на сколько следующий член последовательности отличается от предыдущего, называется разностью прогрессии.

$$d = a_{n+1} - a_n$$



Свойства прогрессии

- 2, 6, 10, 14, 18, $d=4, a_{n+1} > a_n$
- 11, 8, 5, 2, -1, $d=-3, a_{n+1} < a_n$
- 5, 5, 5, 5, 5, $d=0, a_{n+1} = a_n$

- Если в арифметической прогрессии разность положительна ($d > 0$), то прогрессия является возрастающей.
- Если в арифметической прогрессии разность отрицательна ($d < 0$), то прогрессия является убывающей.
- В случае , если разность равна нулю ($d=0$) и все члены прогрессии равны одному и тому же числу, последовательность называется стационарной.

Задача

- На складе 1 числа было 50 тонн угля. Каждый день в течение месяца на склад приходит машина с 3 тоннами угля. Сколько угля будет на складе 30 числа, если в течение этого времени уголь со склада не расходовался.

- $a_1 = 50, d = 3$
- 1 числа: 50 т
- 2 числа: +1 машина (+3 т)
- 3 числа: +2 машины (+3·2 т)
-
- 30 числа: +29 машин (+3·29 т)
- $a_{30} = a_1 + 29d$
 $a_{30} = 137$



Формула n-ого члена

● a_1

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Пример 1.

- Последовательность (c_n) -арифметическая прогрессия. Найдите c_{81} , если $c_1=20$ и $d=3$.

- Решение:

Воспользуемся формулой n -ого члена

$$c_{81} = c_1 + d(81-1),$$

$$c_{81} = 20 + 3 \cdot 80,$$

$$c_{81} = 260.$$

- Ответ: 260.

Задача.

- В арифметической прогрессии четные члены оказались затёрты: 3, ..., 7, ..., 13...

Можно ли восстановить утраченные числа?

- Заметим, что $a_3 = a_1 + 2d$, $a_5 = a_3 + 2d$, $a_7 = a_5 + 2d$ и т.д.
Тогда $d = (a_{n+2} - a_n) : 2$, то есть $d = 2$.

- Искомая последовательность

3, 5, 7, 9, 13, 15, ...

- Можно ли найти пропущенные члены последовательности, не вычисляя разности?

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

- Пусть a_n – искомый член последовательности. Воспользуемся тем, что разность между соседними членами последовательности постоянна:

- $$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= a_{n+1} - a_n, \\ 2a_n &= a_{n-1} + a_{n+1}, \\ a_n &= (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой член этой последовательности, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов.*

№577 б

- Последовательность (c_n) - арифметическая прогрессия. Найдите c_{21} , если $c_1=5,8$ и $d=-1,5$.

- Решение:

Воспользуемся формулой n-ого члена

$$c_{21} = c_1 + d(21-1),$$

$$c_{21} = 5,8 + (-1,5) \cdot 20,$$

$$c_{21} = -24,2.$$

- Ответ: -24,2.



Задача.

- Числовая последовательность задана формулой $a_n = 3 + 5n$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- Является ли эта последовательность арифметической прогрессией? Если да, то какова ее разность?

- Решение:

Поскольку $a_{n+1} = 3 + 5(n+1) = 3 + 5n + 5 = a_n + 5$, при всех значениях n , то последовательность является арифметической прогрессией по определению. Из полученной формулы $a_{n+1} = a_n + 5$ разность этой прогрессии равна 5.



Интересный факт

- Любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой $a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа.

$$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d)$$

- Последовательность (a_n) , заданная формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа, является арифметической прогрессией.

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b + kn - b = k$$

Задача.

- Седьмой член арифметической прогрессии равен 1 и равен разности между четвертым и вторым членами. Найти первый член прогрессии.

- Дано: $a_7=1, a_7=a_4-a_2.$

- Найти: $a_1.$

- Решение: По условию $a_7=a_4-a_2$, то есть $a_7=2d$, но $a_7=1$, поэтому $d=0,5$.

$$a_7=a_1+6d,$$

$$a_1=a_7-6d,$$

$$a_1=1-6\cdot 0,5,$$

$$a_1=-2$$



Домашнее задание:

- пункт 25,
- № 578а, № 580б, №582, №586а, №601а.

- **Творческое задание:**

Докажите, что в арифметической прогрессии для любых номеров, таких что $k < n$, выполняются

равенства

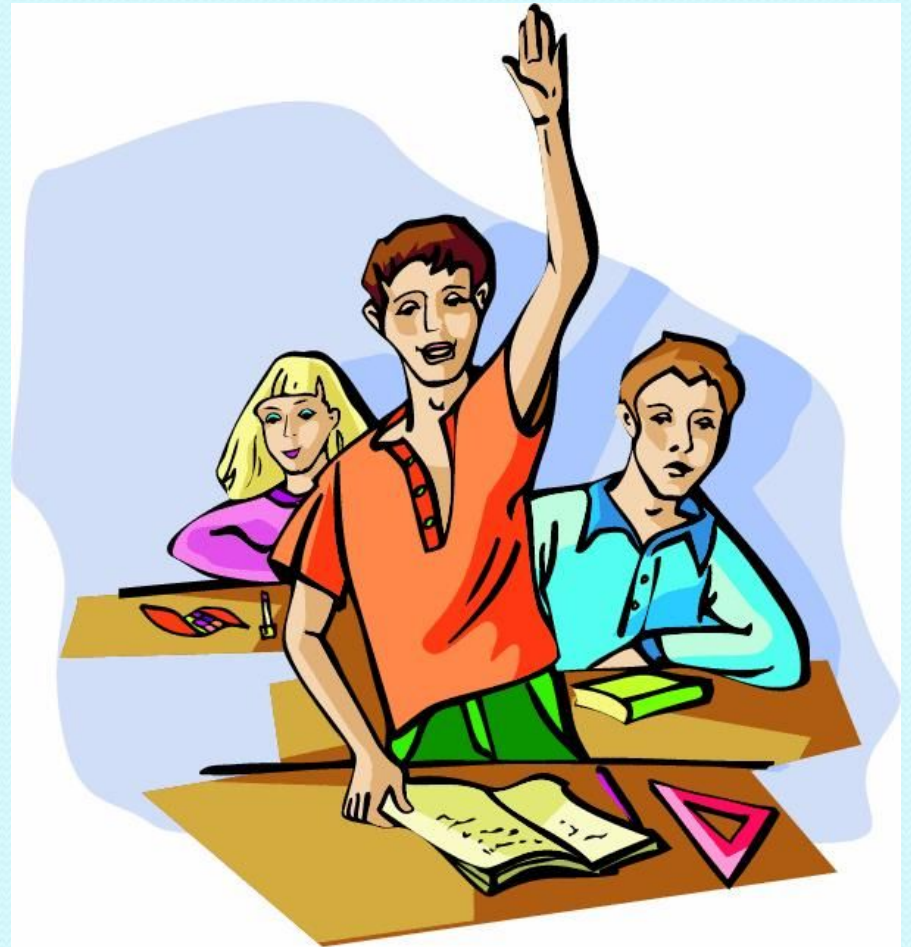
$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

и

$$d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$$



- Успехов в выполнении домашнего задания!



Основные формулы:

- Рекуррентный способ задания арифметической прогрессии

$$a_{n+1} = a_n + d$$

- Разность прогрессии

$$d = a_{n+1} - a_n$$

- Формула n -ого члена

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

- Характеристическое свойство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

