Урюпинский филиал ГБОУ СПО «Волгоградский медицинский колледж»

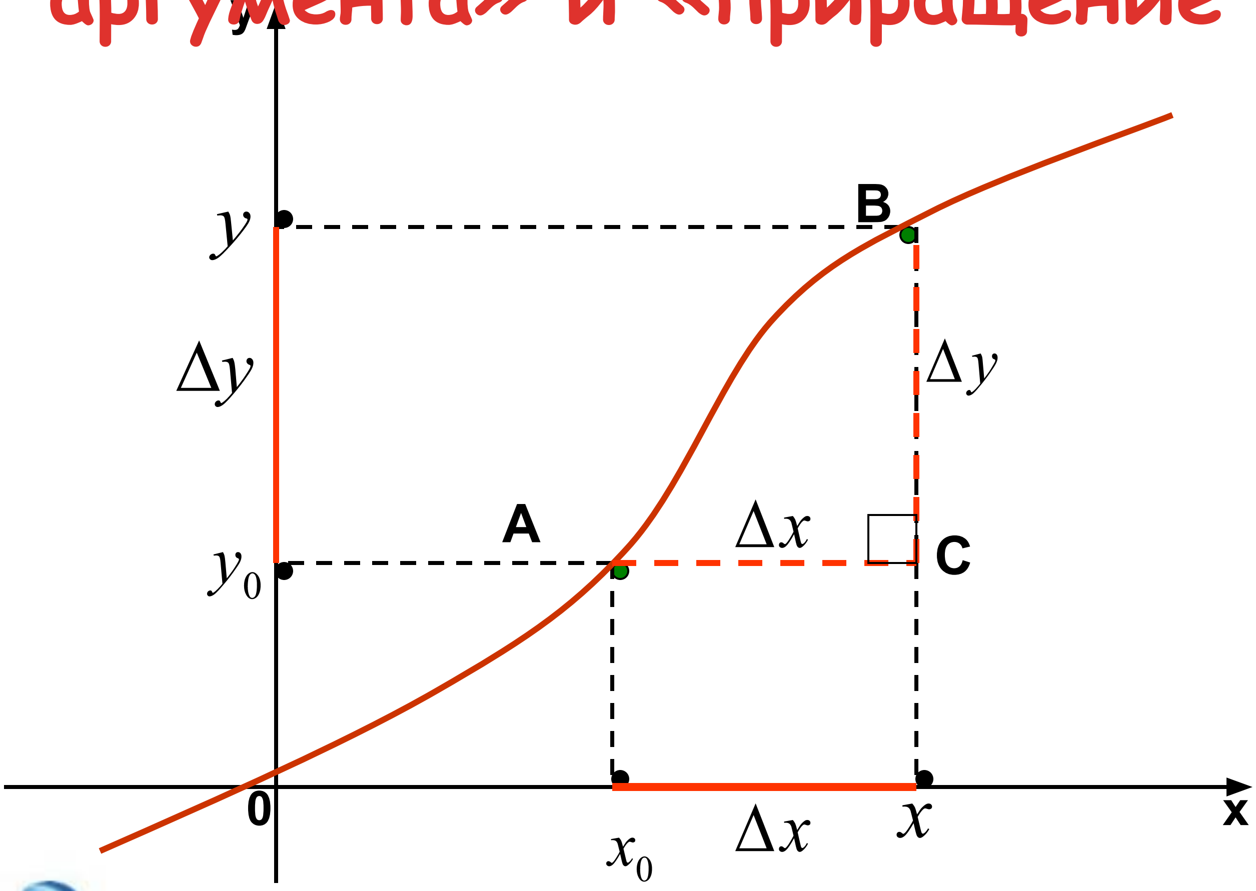
Приращение функции и аргумента. Производные простейших функций

Преподаватель математики и информатики Багрова Г.Г.

Основные вопросы:

- Введение понятий «приращение аргумента» и «приращение функций».
- Определение производной.
- Касательная и секущая к графику функции. Геометрический и физический смысл производной.

Введение понятий «приращение аргумента» и «приращение функций».



Определение 1: Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x и x_0. Разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента**.

Определение 2: Разность $y - y_0$ называют **приращением функции.**

Итак, $\Delta x = x - x_0$, значит, $x = x_0 + \Delta x$.

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Определение.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что - ***называется*** ***производной данной функции и имеет вид:***

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Операция вычисления производной называется дифференци-рованием.

- Функция называется дифференци-руемой в данной точке, если в этой точке существует её производная.

Алгоритм отыскания производной для функции y=f(x)

1. Даем аргументу Х приращение : Х $+\Delta x$

2. Найдем наращенное значение функции, т.е. : у (х + Δx).

3. Вычисляем приращение функции: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$

4. Составляем отношение приращения функции к приращению аргумента: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

5. Находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Пример вычисления производной

$Дано: f(x) = x^2 + 1.$

$Найдем\ f'(x)\ в\ точке\ x_0 = -2,\ то\ есть\ f'(-2).$

Решение

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + \Delta x) = (-2 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= 4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 1 = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

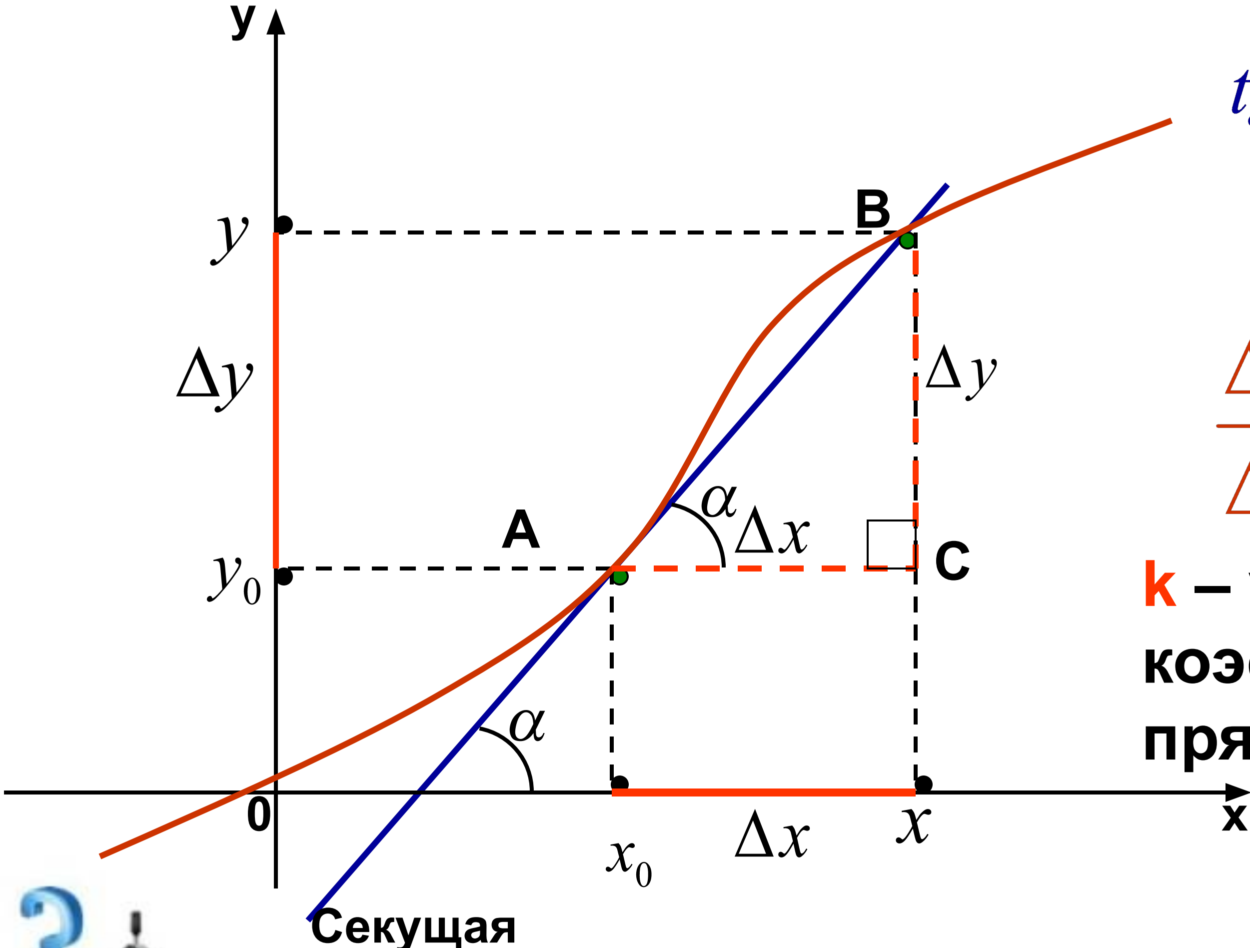
$$\Delta f(x) = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2 - 5 = -4\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = -4 + \Delta x$$

$$Если\ \Delta x \to 0,\ то\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to -4,\ то\ есть\ f'(x) = -4.$$

$$Ответ: f'(x) = -4.$$

Касательная и секущая к графику функции. Геометрический и физический смысл производной.



$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

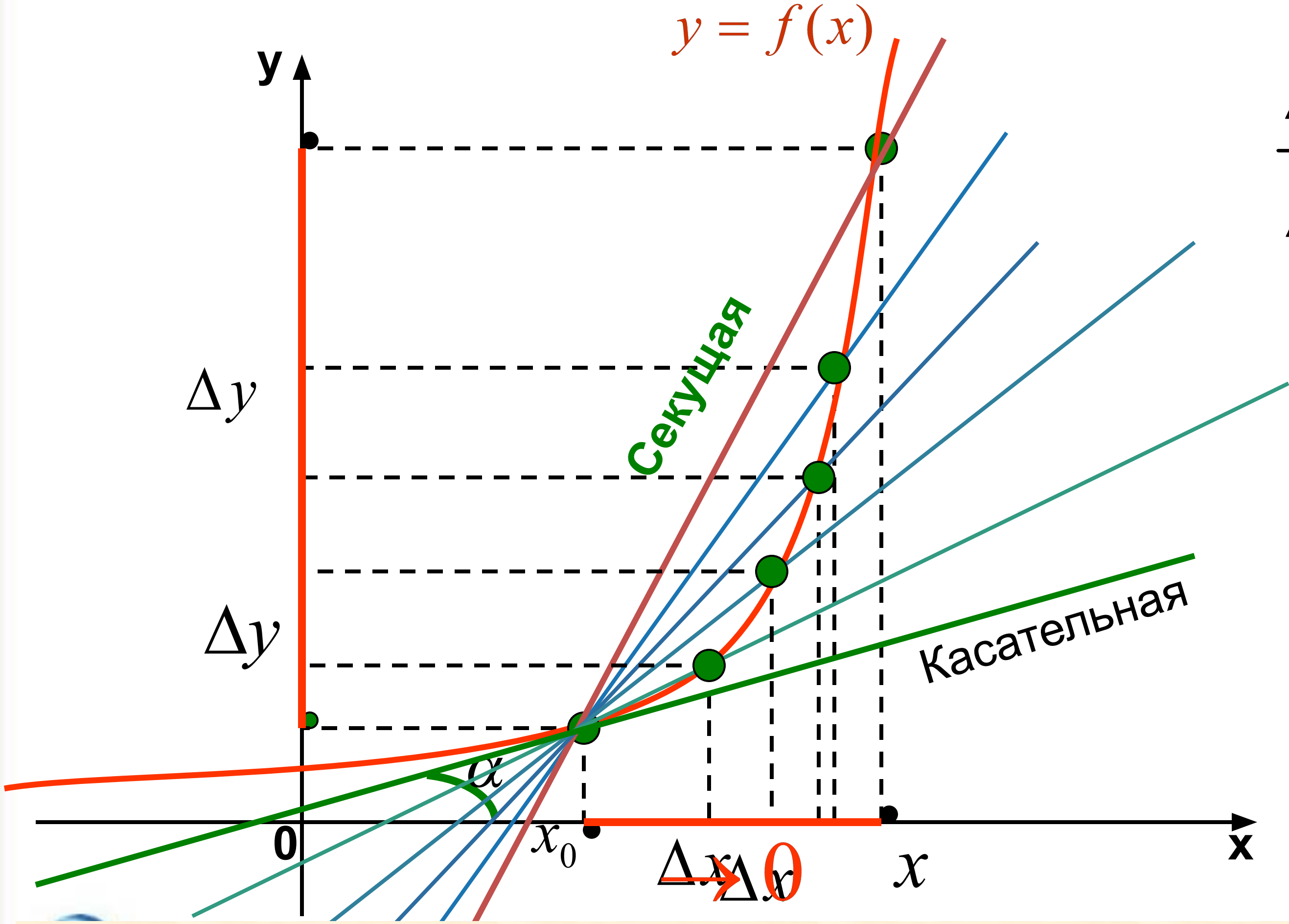
Итак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$



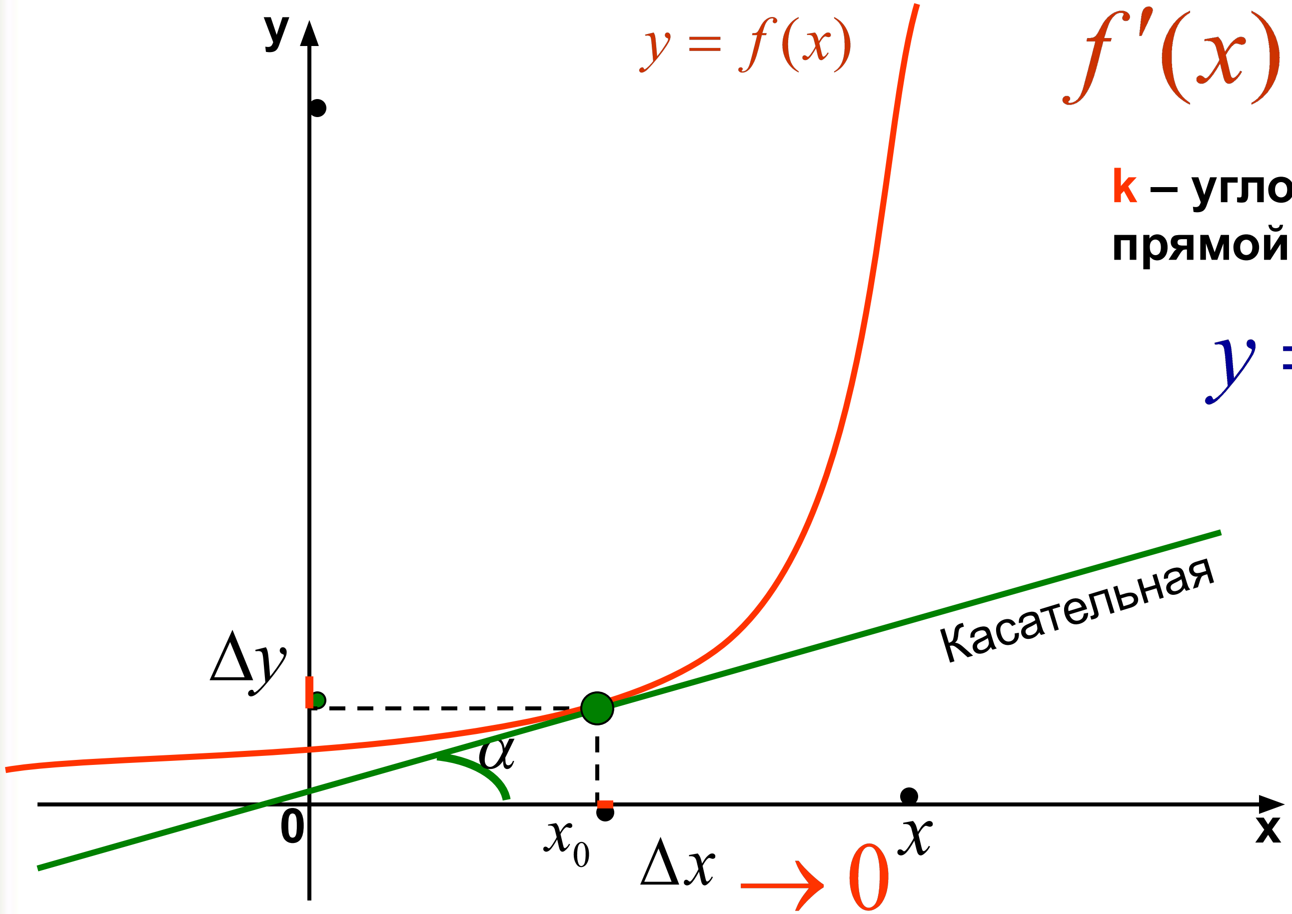
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$

При $\Delta x \to 0$ угловой коэффициент секущей $\to$ к угловому коэффициенту касательной.

Автоматический показ. Щелкните 1 раз.



$$f'(x) = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(касательной)

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить буквой *a* абсциссу точки касания.
2. Найти $f(a)$.
3. Найти $f\,'(x)$ и $f\,'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f\,'(a)$ в общее уравнение касательной

$$y = f(a) + f\,'(a)(x - a).$$

Рассмотрим возможные типы задач на касательную

Ключевая задача 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания a, тогда a=2.

2. Найдем f(a): $f(a)=2^2-2\cdot2-3$, $f(a)=-3$.

3. Найдем f’ (x) и f’(a): $f'(x)=2x-2$, $f'(a)=2$.

4. Подставим найденные числа a, f(a), в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=-3+2(x-2)$,

$y=-3+2x-4$, $y=2x-7$ – уравнение касательной.

Ответ: $y = 2x - 7$.

<u>Задача 2</u>. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

в точке М(3; – 2).

<u>*Решение.*</u> Точка М(3; – 2) является точкой касания, так как

$$f(3) = \frac{1}{5} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 + 1 = -2 \text{ (рис. 1).}$$

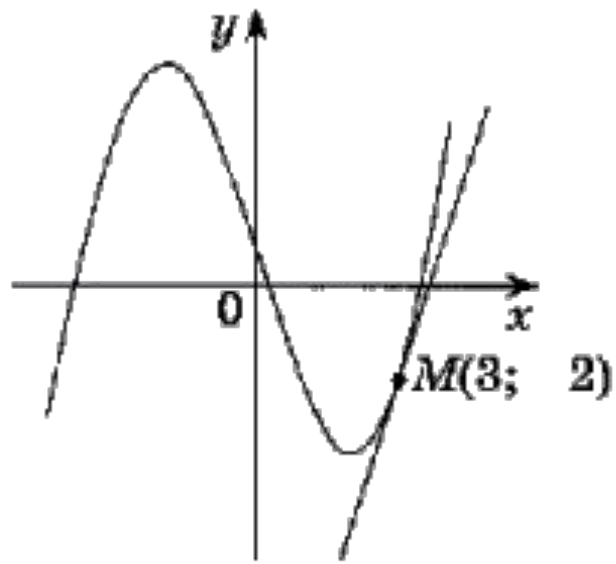


Рис. 1

1. a = 3 – абсцисса точки касания.
2. f(3) = – 2.
3. f '(x) = x^2 – 4, f '(3) = 5.
4. **y = – 2 + 5(x – 3),**

y = 5x – 17 – уравнение касательной.

Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то скорость ее движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $x'(t)$, т.е. **производная от координаты по времени есть скорос** $(v(t) = x'(t))$.

- **Производная от скорости по времени есть ускорение:** $a = v'(t)$.

Ускорение движения есть скорость изменения скорости $v'(t)$, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t.$

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени *t;*

б) в момент времени *t=2c.*

<u>Решение.</u>

а) $V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$

б) $V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(м / с)$

Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону $S(t) = t^2 + 2t + 3:$

а) в момент времени *t;*

б) в момент времени *t=3с.*

Решение.

$$а) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2 * 3 + 2 = 8(м/с)$$

$$a(3) = 2(м/с^2)$$

Проблемная задача

- **Две материальные точки движутся прямолинейно по законам**

$$S_1(t) = 2{,}5t^2 - 6t + 1,$$

$$S_2(t) = 0{,}5t^2 + 2t - 3.$$

В какой момент времени скорости их равны, т.е.

$$V_1(t_0) = V_2(t_0), t_0 - ?$$

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМНОЙ ЗАДАЧИ

$$V_1(t) = (2{,}5t^2 - 6t + 1)' = 5t - 6$$

$$V_1(t_0) = 5t_0 - 6$$

$$V_2(t) = (0{,}5t^2 + 2t - 3)' = t + 2$$

$$V_2(t_0) = t_0 + 2$$

$$5t_0 - 6 = t_0 + 2$$

$$t_0 = 2$$

Домашнее задание:

1. конспект лекции
2. Дадаян. гл.9,§9.1-9.4, №9.3, 9.5, 9.7
3. Колмогоров. гл.2,§4 п.12-14,19, №178(б,в),193 (в,г), 194 (б,в) 195(б,г), 196 (б) №268
4. **СВР:** **Подготовить реферат на тему «Производная и ее применения»**