

Урюпинский филиал ГБОУ СПО «Волгоградский медицинский колледж»

Приращение функции и аргумента.
Производные простейших функций

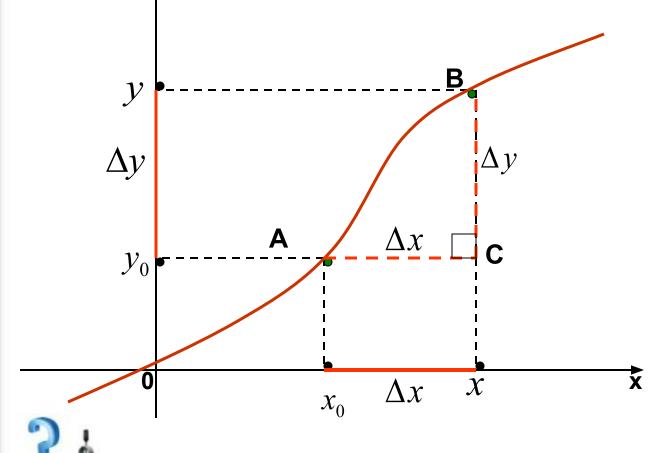
Преподаватель математики и информатики Багрова Г.Г.

Основные вопросы:

- Введение понятий «приращение аргумент» и «приращение функций».
- Определение производной.
- Касательная и секущая к графику функции. Геометрический и физический смысл производной.



Введение понятий «приращение аргумента» и «приращение функций».



Определение 1: Пусть функция= f(x) определена в точках x и x_0 . Разность $x - x_0$ называют приращением аргумента.

Определение 2: Разность у-у₀ называют приращением функции.

Итак,
$$\Delta x = x - x_0$$
 , значит, $x = x_0 + \Delta x$.

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$



Определение.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что - называется производной данной функции и имеет вид:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



• Операция вычисления производной называется дифференцированием.

• Функция называется дифференцируемой в данной точке, если в этой точке существует её производная.



Алгоритм отыскания производной для функции y=f(x)

- 1. Даем аргументу X приращение : X + Δx
- 2. Найдем наращенное значение функции, т.е. : у (х + Δx).
- 3. Вычисляем приращение функции: $\Delta y = y(x + \Delta x) y(x)$
- 4. Составляем отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) y(x)}{\Delta x}$
 - 5. Находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x o 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Пример вычисления производной

Дано:
$$f(x) = x^2 + 1$$
.

Найдем
$$f'(x)$$
 в точке $x_0 = -2$, то есть $f'(-2)$.

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(\mathbf{e}x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + \Delta x) = (-2 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= 4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 1 = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(x_0) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\Delta f(x) = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2 - 5 = -4\Delta x + \Delta x^2$$

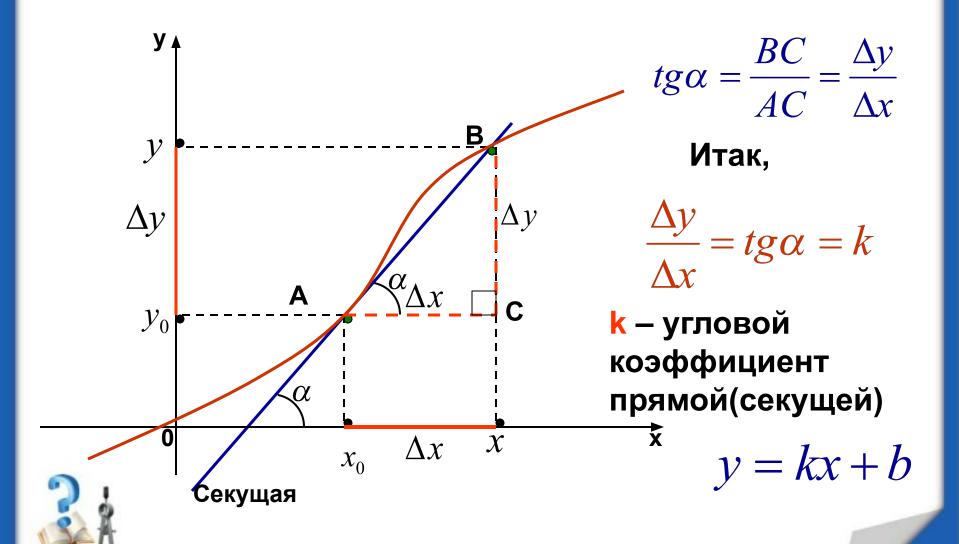
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = -4 + \Delta x$$

Ecru
$$\Delta x \to 0$$
, mo $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to -4$, mo ecrub $f'(x) = -4$.

Omeem:
$$f'(x) = -4$$
.

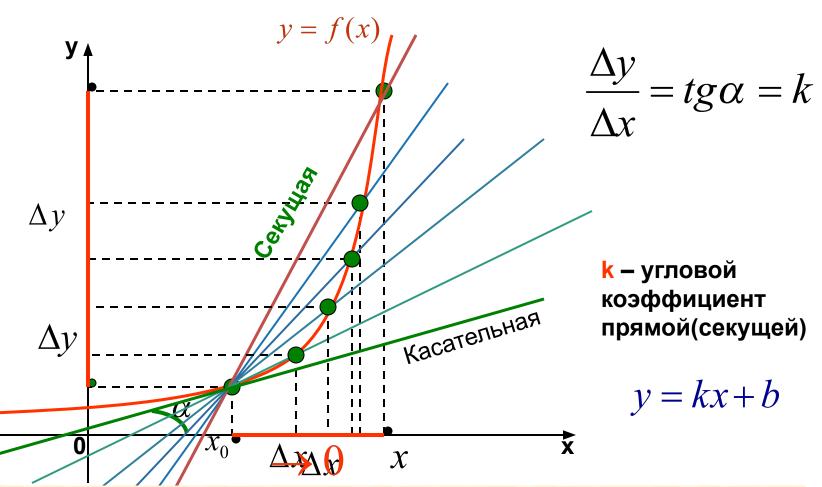
Касательная и секущая к графику функции. Геометрический и физический смысл производной.



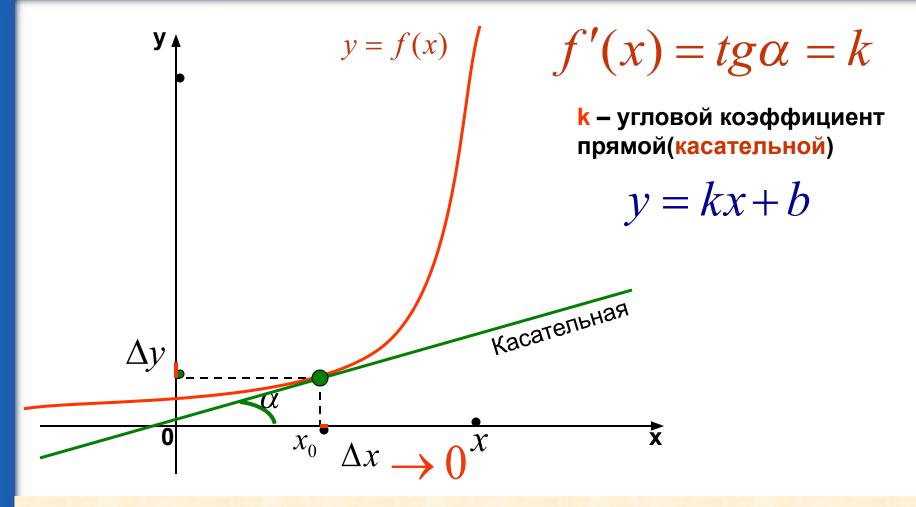


Геометрический смысл отношения





При $\Delta x \to 0$ угловой коэффициент секущей \to к угловому коэффициенту касательной.



Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции у = f(x)

- 1. Обозначить буквой а абсциссу точки касания.
- 2. Найти f(a).
- 3. Найти f '(x) и f '(a).
- 4. Подставить найденные числа а, f(a), f '(a) в общее уравнение касательной

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Рассмотрим возможные типы задач на касательную



Ключевая задача 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания а, тогда a=2.

- 2. Найдем f(a): $f(a)=2^2-2\cdot 2-3$, f(a)=-3.
- 3. Найдем f' (x) и f'(a): f'(x)=2x-2, f'(a)=2.

4. Подставим найденные числа а, f(a), в общее уравнение касательной y=f(a)+f'(a)(x-a): y=-3+2(x-2), y=-3+2x-4, y=2x-7 – уравнение касательной.



Ответ: y = 2x - 7.

Задача 2 . Составьте уравнение касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$
 B TOUKE M(3; -2).

<u>Решение.</u> Точка М(3; − 2) является точкой касания, так как

$$f(3) = \frac{1}{5} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$$
 (puc. 1).



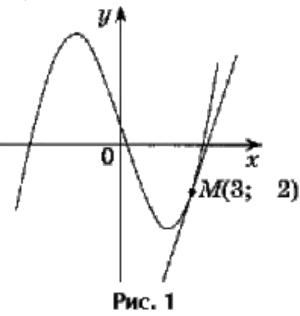
2.
$$f(3) = -2$$
.

3.
$$f'(x) = x^2 - 4$$
, $f'(3) = 5$.

4.
$$y = -2 + 5(x - 3)$$
,

$$y = 5x - 17$$
 - уравнение касательной.





Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону x(t), то скорость ее движения v(t) в момент времени t равна производной x'(t), т.е. производная от координаты по времени есть скорос (v(t) = x'(t)).
- Производная от скорости по времени есть ускорение: a = v'(t).

Ускорение движения есть скорость изменения скорости(t) поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t$. Вычислите скорость движения точки:

- a) в момент времени t;
- б) в момент времени t=2c.

Решение.

a)
$$V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$$

$$V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(M/c)$$

Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки,

движущейся по закону

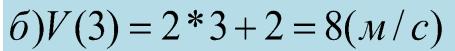
$$S(t) = t^2 + 2t + 3$$
:

- а) в момент времени t;
- б) в момент времени t=3c.

Решение.

$$a)V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$



$$a(3) = 2(M/c^2)$$



Проблемная задача

• Две материальные точки движутся прямолинейно по законам

$$S_1(t) = 2.5t^2 - 6t + 1,$$

$$S_2(t) = 0.5t^2 + 2t - 3.$$

В какой момент времени скорости их равны, т.е.

$$V_1(t_0) = V_2(t_0), t_0 - ?$$



РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМНОЙ ЗАДАЧИ

$$V_{1}(t) = (2,5t^{2} - 6t + 1)' = 5t - 6$$

$$V_{1}(t_{0}) = 5t_{0} - 6$$

$$V_{2}(t) = (0,5t^{2} + 2t - 3)' = t + 2$$

$$V_{2}(t_{0}) = t_{0} + 2$$

$$5t_{0} - 6 = t_{0} + 2$$



 $t_{0} = 2$

Домашнее задание:



1. конспект лекции

2. Дадаян. гл.9,§9.1-9.4, №9.3,

9.5, 9.7

3. Колмогоров. гл.2,§4

п.12-14,19, №178(б,в),193 (в,г),

194 (б,в) 195(б,г), 196 (б) №268

4. СВР: Подготовить

реферат на тему «Производная и ее применения»

