

Урюпинский филиал ГБОУ СПО
«Волгоградский медицинский
колледж»



**Приращение функции и
аргумента.**

**Производные
простейших функций**

Преподаватель математики и
информатики Багрова Г.Г.

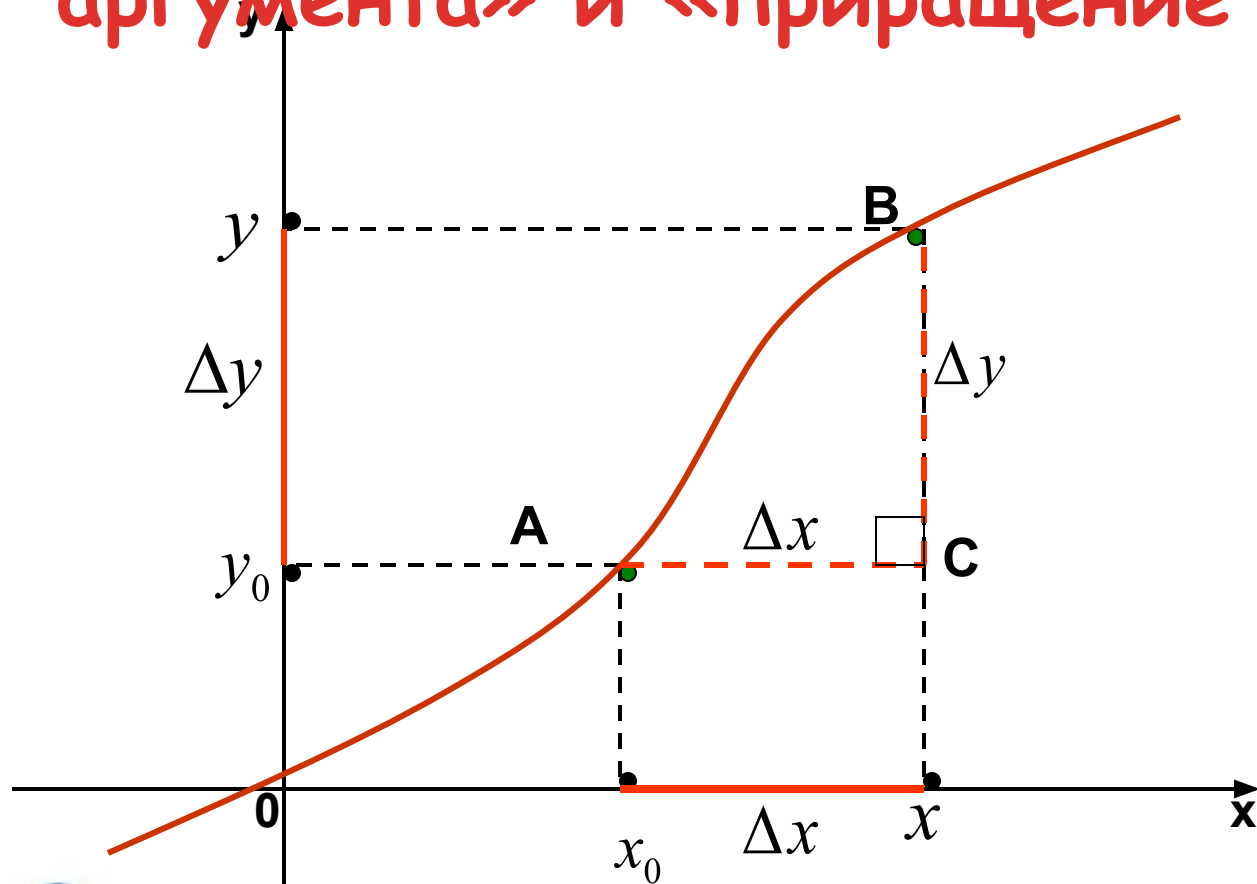


Основные вопросы:

- Введение понятий «приращение аргумента» и «приращение функций».
- Определение производной.
- Касательная и секущая к графику функции. Геометрический и физический смысл производной.



Введение понятий «приращение аргумента» и «приращение функций».



Определение 1: Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x и x_0 . Разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента**.

Определение 2: Разность $y - y_0$ называют **приращением функции**.

Итак, $\Delta x = x - x_0$, значит, $x = x_0 + \Delta x$.

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$



Определение.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \neq 0$, называется **производной данной функции и имеет вид:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



- Операция вычисления производной называется дифференцированием.

- Функция называется дифференцируемой в данной точке, если в этой точке существует её производная.



Алгоритм отыскания производной для функции $y=f(x)$

1. Даем аргументу X приращение : $X + \Delta x$

2. Найдем наращенное значение функции, т.е. : $y(x + \Delta x)$.

3. Вычисляем приращение функции: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$

4. Составляем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

5. Находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$



Пример вычисления производной

Дано: $f(x) = x^2 + 1$.

Найдем $f'(x)$ в точке $x_0 = -2$, то есть $f'(-2)$.

Решени

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + \Delta x) = (-2 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= 4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 1 = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\Delta f(x) = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2 - 5 = -4\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = -4 + \Delta x$$

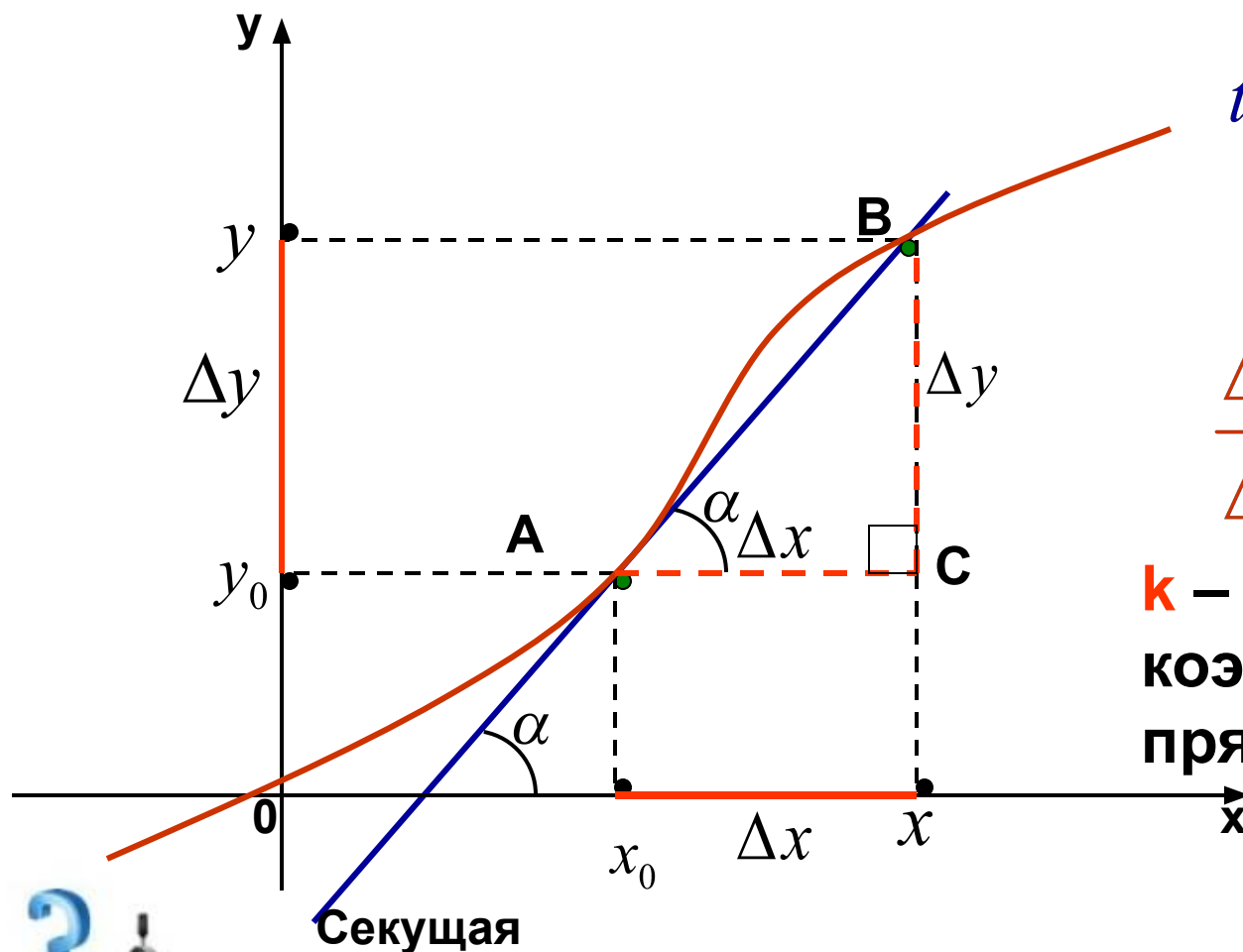


Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \rightarrow -4$, то есть $f'(x) = -4$.

Ответ: $f'(x) = -4$.

Касательная и секущая к
графику функции.
Геометрический и
физический смысл
производной.





$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Итак,

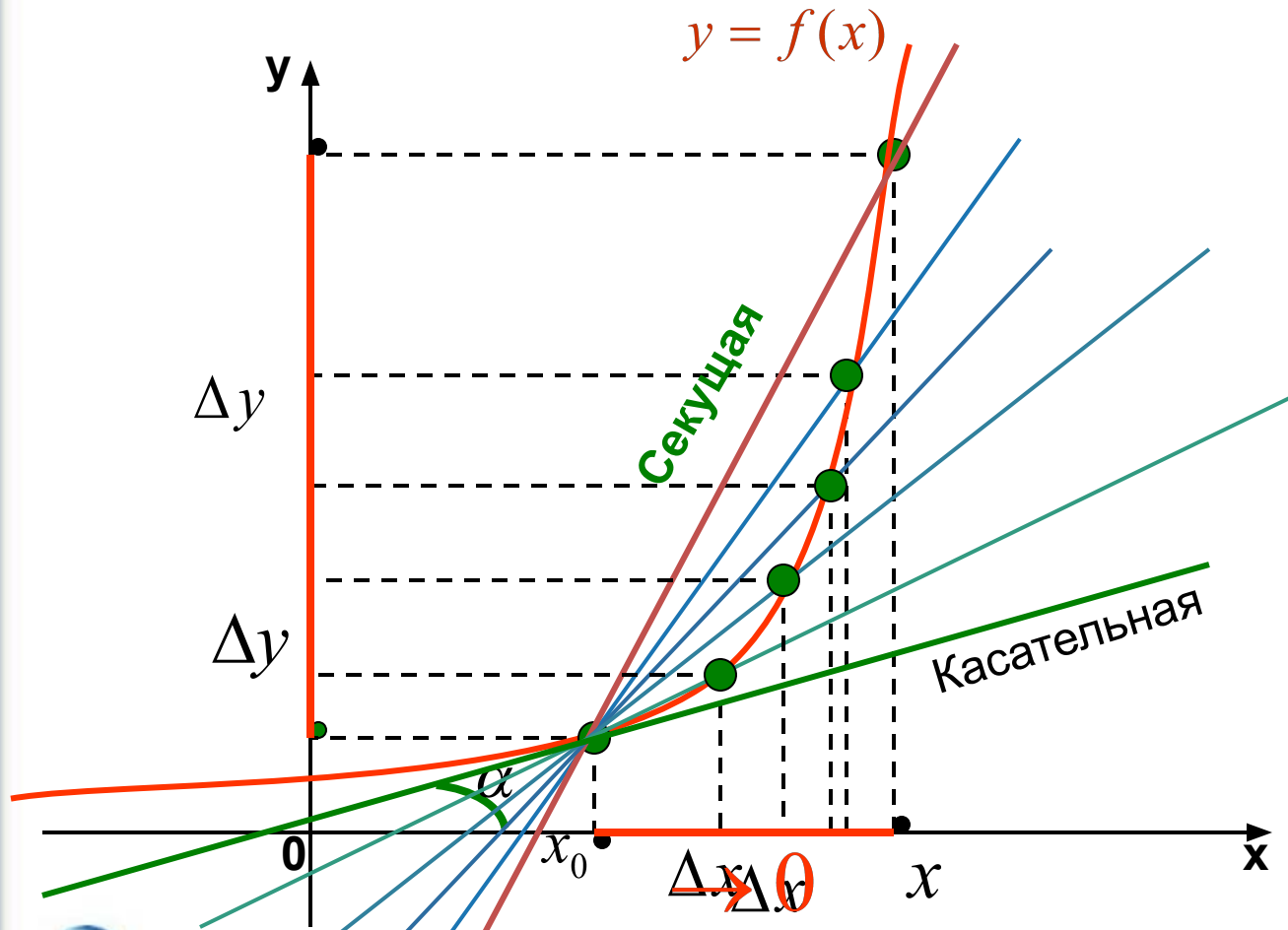
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой (секущей)

$$y = kx + b$$



Геометрический смысл отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$

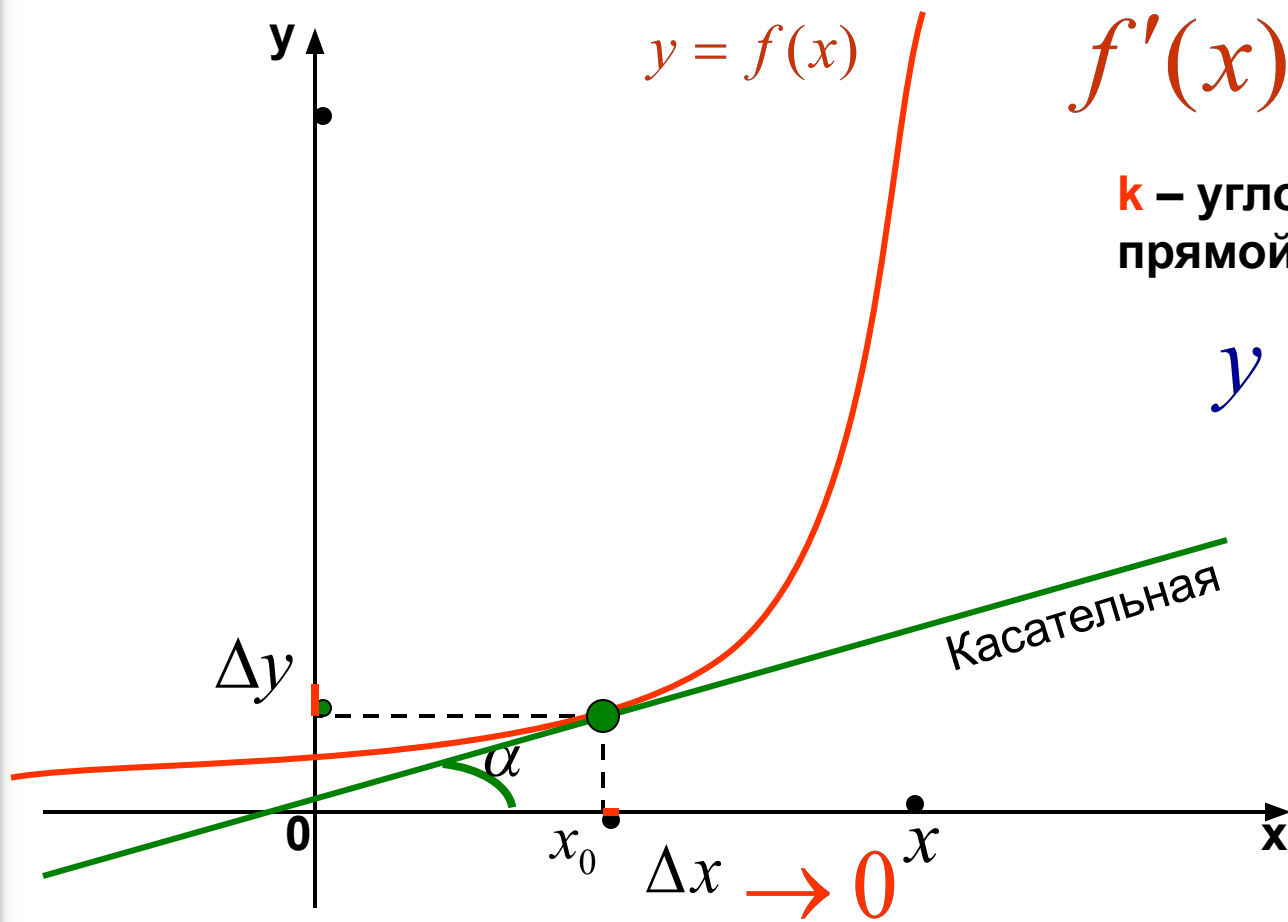


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ угловой коэффициент секущей \rightarrow к угловому коэффициенту касательной.



$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент
прямой (касательной)

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить буквой a абсциссу точки касания.
2. Найти $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a , $f(a)$, $f'(a)$ в общее уравнение касательной

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$



Рассмотрим ВОЗМОЖНЫЕ ТИПЫ задач на касательную



Ключевая задача 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания a , тогда $a=2$.

2. Найдем $f(a)$: $f(a)=2^2-2\cdot 2-3$, $f(a)=-3$.

3. Найдем $f'(x)$ и $f'(a)$: $f'(x)=2x-2$, $f'(a)=2$.

4. Подставим найденные числа a , $f(a)$, в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=-3+2(x-2)$,
 $y=-3+2x-4$, $y=2x-7$ – уравнение касательной.

Ответ: $y = 2x - 7$.



Задача 2. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \quad \text{в точке } M(3; -2).$$

Решение. Точка $M(3; -2)$ является точкой касания, так как

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 + 1 = -2 \quad (\text{рис. 1}).$$

1. $a = 3$ – абсцисса точки касания.

2. $f(3) = -2$.

3. $f'(x) = x^2 - 4$, $f'(3) = 5$.

4. $y = -2 + 5(x - 3)$,

$y = 5x - 17$ – уравнение касательной.

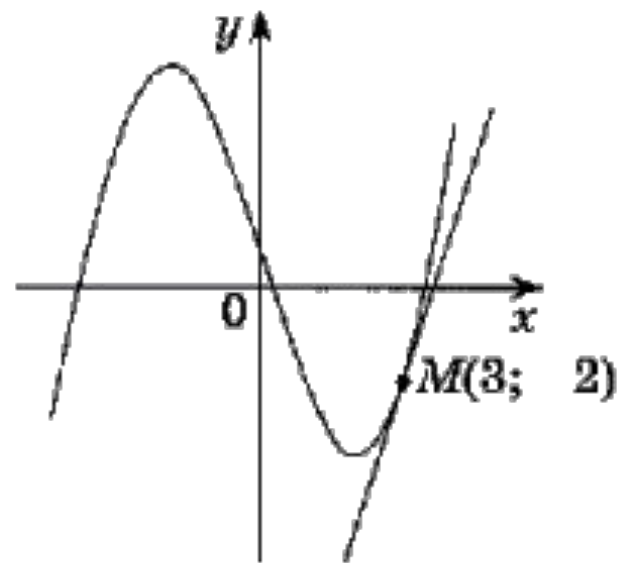


Рис. 1



Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то скорость ее движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $x'(t)$, т.е. **производная от координаты по времени есть скорость** ($v(t) = x'(t)$).
- **Производная от скорости по времени есть ускорение:** $a = v'(t)$.

Ускорение движения есть скорость изменения скорости $v'(t)$, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$



Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t$.

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени t ;

б) в момент времени $t=2$ с.

Решение.

а) $V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$

б) $V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(\text{м / с})$



Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки,
движущейся по закону

$$S(t) = t^2 + 2t + 3:$$

а) в момент времени t ;

б) в момент времени $t=3\text{с}$.

Решение.

$$a) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2 * 3 + 2 = 8(\text{м/с})$$

$$a(3) = 2(\text{м/с}^2)$$



Проблемная задача

- Две материальные точки движутся прямолинейно по законам

$$S_1(t) = 2,5t^2 - 6t + 1,$$

$$S_2(t) = 0,5t^2 + 2t - 3.$$

В какой момент времени скорости их равны, т.е.

$$V_1(t_0) = V_2(t_0), t_0 - ?$$



РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМНОЙ ЗАДАЧИ

$$V_1(t) = (2,5t^2 - 6t + 1)' = 5t - 6$$

$$V_1(t_0) = 5t_0 - 6$$

$$V_2(t) = (0,5t^2 + 2t - 3)' = t + 2$$

$$V_2(t_0) = t_0 + 2$$

$$5t_0 - 6 = t_0 + 2$$

$$t_0 = 2$$



Домашнее задание:



1. конспект лекции
2. Дадаян. гл.9, §9.1-9.4, №9.3, 9.5, 9.7
3. Колмогоров. гл.2, §4 п.12-14, 19, №178(б,в), 193 (в,г), 194 (б,в) 195(б,г), 196 (б) №268
4. **СВР: Подготовить реферат на тему «Производная и ее применения»**

