Системы рациональных уравнений.

Учитель математики МАОУ ШИЛИ
Ерёмина Людмила Александровна

г. Калининград

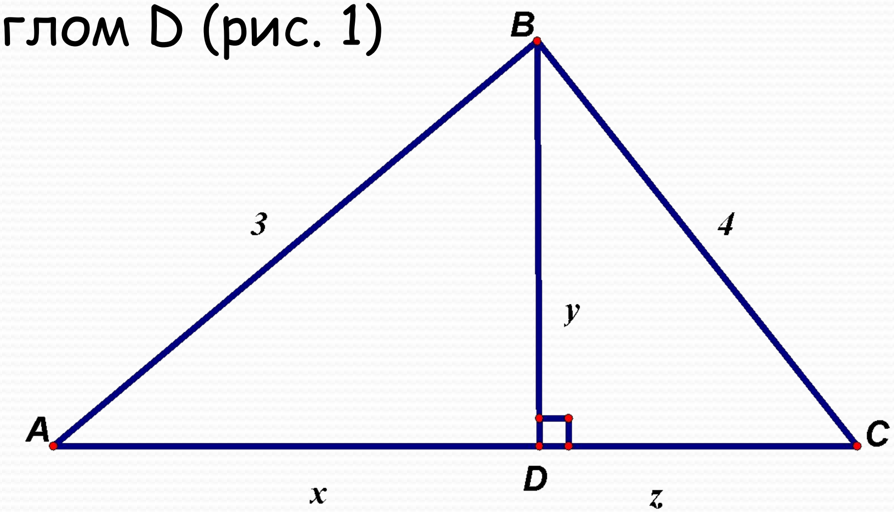
Геометрические приемы решения систем уравнений.

Пример 1. Если $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y^2+z^2=16, \\ y^2=xz \end{cases}$ и $x>0, y>0, z>0$ найти xy+yz.

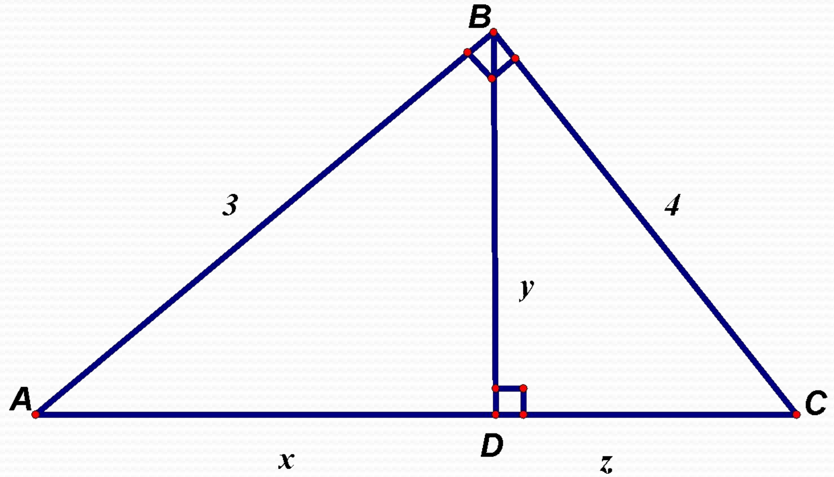
Решение.

По теореме, обратной теореме Пифагора, числа x, y и 3 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABD (угол D – прямой).

Тогда из второго уравнения системы можно сделать вывод, что y, z и 4 являются соответственно длинами катетов и гипотенузы треугольника BCD с прямым углом D (рис. 1)



Третье уравнение системы дает возможность утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z. Тогда по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC – прямой (рис.2).



Рассмотрим выражение xy + yz.

$$xy + yz = (x + z)y = 2S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Пример 2. Для положительных x, y и z из условий

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169, \quad y^2 + z^2 = 50, \quad x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144,$$

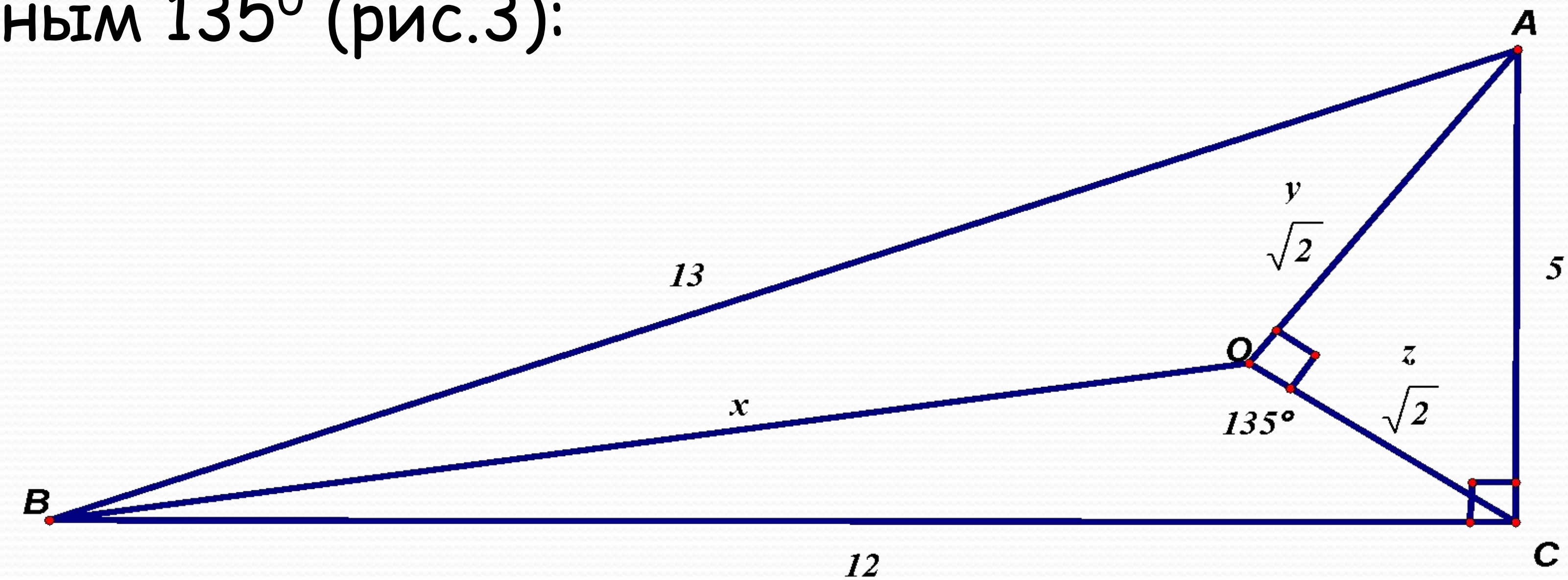
не находя значений x,y,z, вычислите значение выражения xy+yz+zx.

Решение.

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} = 169, \\ y^2 + z^2 = 50, \\ x^2 + xz + \dfrac{z^2}{2} = 144. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Пифагора, числа $\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}$ и 5 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника AOC с прямым углом AOC, а числа x, $\frac{y}{\sqrt{2}}$ и 13 есть длины сторон треугольника AOB с углом AOB, равным 135^0.

Этот вывод можно сделать, используя теорему, обратную теореме косинусов. Аналогично x, $\frac{z}{\sqrt{2}}$ и 12 есть длины сторон треугольника BOC с углом BOC, равным 135^0 (рис.3):



- Т.к. $5^2+12^2=13^2$ то в $\triangle ABC$ угол АСВ=90^0.

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}x\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xy;$$

$$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}yz;$$

$$S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}x\cdot\frac{z}{\sqrt{2}}\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xz;$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30.$$

- Тогда искомое значение xy+yz+zx равно учетверенной площади треугольника АВС.
- xy+yz+zx =120.

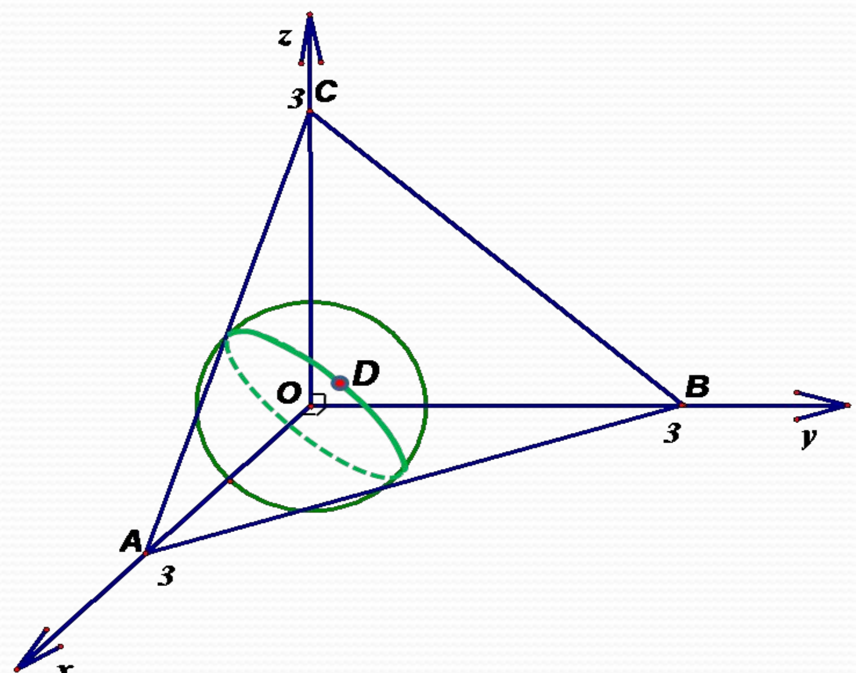
Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

Решение. Уравнение $x+y+z=3$ есть уравнение плоскости, пересекающей оси прямоугольной системы координат в точках *A* (3; 0; 0), B(0; 3; 0), *C* (0; 0; 3).

Уравнение $x^2+y^2+z^2=3$ есть уравнение сферы с центром в точке O(0; 0; 0)

и радиусом $R=\sqrt{3}.$

(рис. 4):



Вычислим расстояние от точки O до плоскости ABC. Для этого рассмотрим тетраэдр OABC.

Объем тетраэдра равен $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} H$, где H=OD (D- центр $\triangle ABC$), то есть

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} H = \frac{3H\sqrt{3}}{2}.$$

Объем тетраэдра может быть вычислен иначе:

$\frac{1}{3} S_{\Delta OAB} \cdot CO,$ т.е. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$

- Приравнивая правые части, получаем, что $H = \sqrt{3}$. Это означает, что расстояние от точки O до плоскости ABC равно радиусу сферы, т.е. плоскость касается сферы. Следовательно, точка касания является центром треугольника ABC.
- Так как D(x; y; z) – центр равностороннего треугольника ABC, где A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C (0; 0; 3), то x = y= z.
- Заменив y и z на x в уравнениях данной системы, получим x=1.

- Ответ. (1; 1; 1).

Решение систем уравнений с тремя переменными с помощью скалярного произведения.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9, & (1) \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27, & (2) \\ x^y + y^z + z^x = 3. & (3) \end{cases}$$

Уравнение (1) – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, уравнение (2) выражает квадрат длины $\vec{a}$.

Пусть $\vec{a}\,\{3^x; 3^y; 3^z\}, \vec{b}\{1; 1; 1\}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9^x + 9^y + 9^z} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 9, \ \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 9.$$

Тогда $\frac{3^x}{1} = \frac{3^y}{1} = \frac{3^z}{1} \quad \to \quad x = y = z.$

Подставляя в (1) получаем: $3 \cdot 3^x = 9; x = 1.$

Т.о. $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$. Проверим, подставив в (3).

Ответ. (1;1;1).

Пример 2. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 169, \\ x + y + z = 19. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\vec{a}\{x; y; z\}, \vec{b}\{1; 1; 1\}$

$$|\vec{a}|^2 = 169, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 19.$$

$$|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 13\sqrt{3}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 19$$

Т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Система имеет бесконечное множество решений.

Пример 3. Показать, что система $\begin{cases} 25x^{12} + 16y^8 + 9z^4 = 1, \\ x^6 + y^4 + z^2 = \dfrac{7}{15} \end{cases}$

несовместна.

Решение. Пусть $\vec{a}\{5x^6; 4y^4; 3z^2\}, \vec{b}\left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right\}.$

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{769}{3600}}.$$

Т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{7}{15}$ $\quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{\dfrac{769}{3600}} < \dfrac{28}{60} = \dfrac{7}{15},$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} > |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

и система несовместна.

Пример 4. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2=-y(x+z); \\ x^2+x+y=-2yz; \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz=2x+4z+2. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x(x+y)+y(y+z)=0; \\ x(x+1)+y(2z+1)=0; \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2=(x+1)^2+(2z+1)^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем векторы $\vec{a}(x;y), \vec{b}(x+y;y+z), \vec{c}(x+1;2z+1)$

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ 4\vec{b}^2=\vec{c}^2$

Если $\vec{a}=\vec{0},$ то x=y=o, z $=-\frac{1}{2}.$

Если $\vec{a}\neq\vec{0},$ то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и, следовательно, $\vec{c}=\pm2\vec{b}.$

Два значения для c дают две возможности решения системы.

Первая возможность: $\vec{c} = 2\vec{b}.$

$$\begin{cases} x + 1 = 2(x + y); \\ 2y + 2z = 2z + 1, \end{cases} \quad x = 0, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z - \text{любое}.$$

Значения z находим из первого или из второго уравнения системы (1), подставив в неё значения $x = 0,\ y = 0{,}5.$

Например, $0{,}5(0{,}5 + z) = 0, \quad z = -0{,}5.$

Вторая возможность: $\vec{c} = -2\vec{b}.$

Составленные в соответствии с этим условием уравнения

$$\begin{cases} x + 1 = -2(x + y); \\ -2y - 2z = 2z + 1 \end{cases}$$

не дают решения исходной системы.

Итак, получены два решения:

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ z = -0{,}5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0; \\ y = 0{,}5; \\ z = -0{,}5. \end{cases}$$

Ответ. (0;0;-0,5), (0;0,5;-0,5).