

Равносильность уравнений

Равносильные уравнения

Два уравнения с одной переменной $f(x)=g(x)$ и $p(x)=h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Пример №1: уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$

равносильны. Оба они имеют по два корня : 2 и -2.

Этапы решения уравнений:

- ПЕРВЫЙ ЭТАП – *технический*. Выполнение преобразований для получения более простого уравнения, нахождения корня последнего (самого простого) уравнения.
- ВТОРОЙ ЭТАП – *анализ решения*. Анализ проведенных преобразований, ответ на вопрос все ли преобразования были равносильны.
- ТРЕТИЙ ЭТАП – *проверка*. Проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

равносильности уравнений:

- «спокойные» – гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не приводит к потере или приобретению посторонних корней.
- «беспокойные» – они работают лишь при определенных условиях, их использование может привести к потере или приобретению посторонних корней.

«СПОКОЙНЫЕ» ТЕОРЕМЫ:

- **Теорема 1.** Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.
- **Теорема 2.** Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.
- **Теорема 3.** Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

«беспокойные» теоремы:

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x)=g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0, - то получится уравнение $f(x) h(x) =g(x) h(x)$, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n = g(x)^n$

Теорема 6. Если $f(x)>0$ и $g(x)>0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a>0$ и $a\neq 1$, равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Примеры появления посторонних корней:

- **Пример№2.** Уравнение $x - 1 = 3$ имеет один корень $x = 4$.

Умножим обе части уравнения на $(x - 2)$, получим уравнение $(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$, имеющее два корня:

$$x_1 = 4 \text{ и } x_2 = 2.$$

Выполним проверку корней,

корень $x_2 = 2$ является посторонним.

Мы нарушили условие **Теоремы 4**: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, нигде не должно обращаться в 0. Выражение $x - 2$ обращается в 0 при $x = 2$ – именно это значение и оказалось посторонним корнем.

Пример №3. Уравнение $x - 1 = 3$ имеет один корень $x = 4$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $(x - 1)^2 = 9$, имеющее два корня:

$$x_1 = 4 \text{ и } x_2 = -2$$

Выполним проверку корней.

Корень $x_2 = -2$ является посторонним.

Мы нарушили условие Теоремы 5: обе части уравнения должны быть неотрицательны. Про выражение $x - 1$ этого утверждать мы не можем.

Пример №4. Рассмотрим уравнение $\ln(2x - 4) = \ln(3x - 5)$.
Потенцируя, получаем $2x - 4 = 3x - 5$ с единственным корнем
 $x = 1$.

Выполним проверку по ОДЗ:
$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases}$$

Корень оказался посторонним, поскольку оба выражения под знаком логарифма принимают отрицательные значения.

Мы нарушили условие Теоремы 6: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными, о данных выражениях этого утверждать нельзя.

Причины появления посторонних корней:

- 1) Освобождение от знаменателей, содержащих переменную величину;
- 2) Освобождение от знаков корней четной степени;
- 3) Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.
- 4) Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;
- 5) Умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной.

**ПРОВЕРКА КОРНЕЙ
ОБЯЗАТЕЛЬНА!!!**

Пример №5:

Решите уравнение $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{5x - 6} = 5$.

ПЕРВЫЙ ЭТАП – *технический*.

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 44\frac{2}{9}.$$

ВТОРОЙ ЭТАП – *анализ решения*.

Возведение в квадрат, избавление от квадратного корня.

ТРЕТИЙ ЭТАП – *проверка*.

$x_2 = 44\frac{2}{9}$ – посторонний корень.

Ответ: $x = 2$.

Пример №6:

Решите уравнение $\ln(x + 4) + \ln(2x + 3) = \ln(1 - 2x)$

ПЕРВЫЙ ЭТАП – *технический*.

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = -5,5$$

ВТОРОЙ ЭТАП – *анализ решения*.

Освобождение от знаков логарифма.

ТРЕТИЙ ЭТАП – *проверка*.

$$\text{Проверка по ОДЗ: } \begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

$x = -5,5$ – посторонний корень

Ответ: $x = -2$.

Причины потери корней:

- 1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);
- 2) сужение ОДЗ в процессе решения задачи (не верное применение формул, не соответствие левой и правой частей уравнения).

Как избежать потери корней

1) **НЕ ДЕЛИТЬ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НА ОДНО И ТО ЖЕ ВЫРАЖЕНИЕ $h(x)$!!!**

Уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ заменить уравнением $h(x)(f(x) - g(x)) = 0$, а не уравнением $f(x) = g(x)$.

2) **Применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей уравнения были одинаковыми.**

Пример №7

Решим уравнение $\log x^2 = 4$.

1 способ: Воспользуемся определением логарифма

$$x^2 = 10^4;$$

$$x_1 = 100 \text{ и } x_2 = -100.$$

2 способ: Воспользуемся формулой, получим $2\log x = 4$;

$$\log x = 2; x = 100.$$

Произошло сужение ОДЗ, корень $x = -100$ был потерян.

Была неверно применена формула: $\log x^2 = 2\log|x|$.

Получилось, что для $\log x^2$ ($x \neq 0, x > 0, x < 0$), а для

$$2\log x \quad (x \neq 0, x > 0).$$