Глава 5. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§14. Случайные события и их вероятности

I. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАТОРИКИ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Содержание

Введение

- В теории вероятностей и математической статистике строятся и исследуются модели различных ситуаций, связанных с понятием случайности. Один из основателей математической статистики шведский ученый Гаральд Крамер писал так: «По-видимому, невозможно дать точное определение того, что подразумевается под словом “случайный”. Смысл этого слова лучше всего разъяснить на примерах».
- В § 14 мы последовали этому совету и разобрали простейшие вероятностные задачи. После знакомства с основными формулами комбинаторики можно переходить к более сложным задачам.

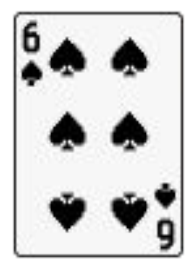
Часть 1.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАТОРИКИ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пример 1.

- Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что среди них: а) нет пиковой дамы; б) есть пиковая дама?

Решение. У нас имеется множество из 36 элементов — игральных карт. Мы производим выбор трех элементов, порядок выбора не важен. Значит, имеется $\mathbf{N = C_{36}^{3}}$ исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предполагать, что все эти исходы равновероятны между… й.



Пример 1. а) нет пиковой дамы

а) Среди всех N исходов нам следует сосчитать те, в которых нет пиковой дамы (событие А). Поэтому отложим даму пик в сторону и будем выбирать три карты из оставшихся 35 карт. Получатся все интересующие нас варианты: **$N(A)=C_{35}^{3}$**. Осталось вычислить нужную вероятность:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{C_{35}^{3}}{C_{36}^{3}}=\frac{35!}{3!\cdot 32!}\cdot\frac{3!\cdot 33!}{36!}=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}.$$

Пример 1. б) есть пиковая дама

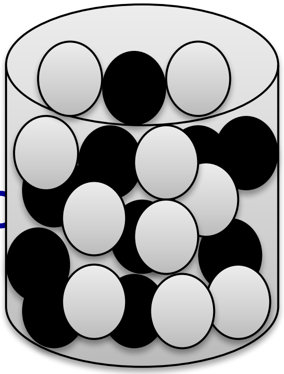
б) Вычислим вероятность противоположного события А (есть дама пик) по формуле :

$P(A) = 1 - P(A) = 1/12.$

Ответ: а) 5/12; б)1/12.

Пример 2.

- В урне лежит 10 белых и 11 черных шаров. Случайным образом достают пять шаров. Какова вероятность того, что:



а) среди этих пяти шаров ровно три белых;

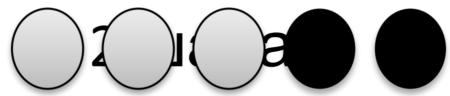
б) среди них не менее четырех белых шаров;

в) большинство шаров — белые?

Решение. Считаем шары в урне неразличимыми на ощупь. Из 21 шара случайным образом производят выбор пяти шаров. Порядок выбора не важен. Значит, существует $\mathbf{N(A) = C_{21}^{5}}$ способов такого выбора.

Пример 2. а) среди этих пяти шаров ровно три белых;

а) Интересующее нас событие А наступает, когда три из пяти шаров — белые, а два оставшихся — черные, т. е. когда из 10 белых шаров оказались выбранными 3 шара, а из 11 черных шаров 2 шара.



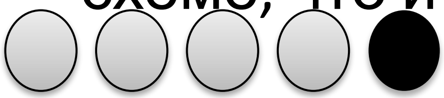
- Из 10 белых шаров 3 шара можно выбрать C_{10}^{3} способами, а из 11 черных шаров 2 шара можно выбрать C_{11}^{2} способами. По правилу умножения получаем, что нужный нам состав шаров можно выбрать $N(A)=C_{10}^{3} \bullet C_{11}^{2}$ способами. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^{3} \cdot C_{11}^{2}}{C_{21}^{5}} = \frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{11!}{2!9!} \cdot \frac{5!16!}{21!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 21} = \frac{2200}{6783} \approx 0{,}3243.$$

Пример 2. б) среди них не менее четырех белых шаров;

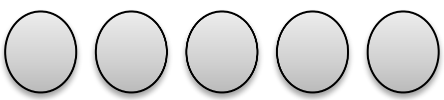
б) Проведем перебор случаев. Пусть **B** — событие, состоящее в том, что **белых шаров ровно 4**, а **C** — событие, означающее, что **все 5 шаров — белые**. Вероятности P(B) и P(C) вычисляются по той же схеме, что и P(A) в пункте а).



$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{C_{10}^4 \cdot C_{11}^1}{C_{21}^5} = \frac{10!}{4!6!} \cdot 11 \cdot \frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 11 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 21} = \frac{770}{6783} \approx 0{,}1135;$$

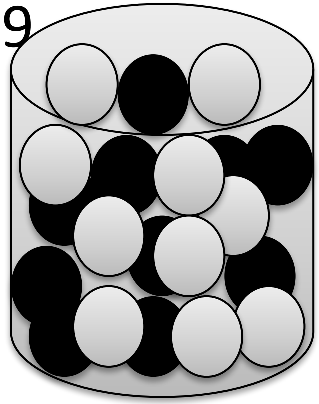


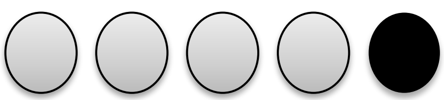
$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{C_{10}^5}{C_{21}^5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!\,16!}{21!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

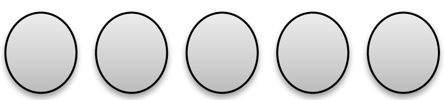
$$= \frac{4}{17 \cdot 19} \approx 0{,}0124.$$

Пример 2. б) среди них не менее четырех белых шаров;

- События B и C не могут наступить одновременно, т. е. они несовместны. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий (об этом мы уже говорили в курсе алгебры 9-го класса). Значит,
- $P(B + C) = P(B) + P(C) \approx 0{,}1135 + 0{,}0124 = 0{,}1259$







Вероятность суммы двух несовместных

- Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

Пример 2. в) большинство шаров — белые?

в) Интересующее нас событие произойдет в следующих случаях: из пяти вытащенных шаров — 3 белых и 2 черных, из пяти шаров — 4 белых и 1 черный, все 5 шаров — белые. Эти три случая соответствуют событиям А, Б, С, разобранным в пунктах а) и б). Никакие два из событий А, В, С не могут наступить одновременно, т. е. эти события **попарно несовместны.** Поэтому Р(А + В + С) = Р(А) + Р(В) + + Р (С) = 0,3243 + 0,1135 + 0,0124 = 0,4502.

Ответ: а)0,3243; б)0,1259; в)0,4502.

ЗАМЕЧАНИЕ

- Задачи на отыскание вероятностей случайных событий
«в два с половиной раза» сложнее задач по комбинаторике.
- Сначала мы используем комбинаторику при нахождении N — количества всех исходов опыта.
- Во второй раз комбинаторика нужна при нахождении N(A), причем это уже, как правило, более сложная комбинаторика.
- Наконец, надо еще уметь вычислить значение дроби.
- Вот и получается «две с половиной комбинаторики».

В п. 1 продолжается начавшийся в § 51 подсчет вероятностей различных событий, но уже с использованием такого мощного комбинаторного аппарата, как формулы для числа сочетаний. Подчеркнем, что и в учебнике, и в задачнике мы уделяем довольно мало внимания формуле $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ для числа размещений по сравнению с формулой для числа сочетаний. Дело в том, что, по нашему мнению, в большинстве элементарных комбинаторных задач найти число размещений всегда можно по правилу умножения, и запоминание формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ не так уж и необходимо. В то же время значимость и «используемость» формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ существенно выше: и при решении задач отдельно выводить ее затруднительно, и во многих вопросах теории тяжело обойтись без надежного знания этой формулы.

В п. 1 подробно рассматривается решение двух примеров. В первом из них отрабатывается умение применять формулу $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, во втором — формулы $P(A + B) = P(A) + P(B)$ и $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$ для попарно несовместных событий.