Решение задач теории вероятностей

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называют ***теорией вероятностей***

Теория вероятностей *– это математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми.*

(БСЭ)

Случайным событием (или просто: ***событием***) называется событие, которое может наступить в ходе некоторого опыта, а может не наступить.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно наступит в результате данного опыта.

Событие называется ***невозможным***, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта.

Пример: Опыт: бросание игральной кости: событие А – выпадение 5 очков, событие В – выпадение четного числа очков, событие С – выпадение 7 очков, событие D – выпадение целого числа очков и т.д. В данном примере события А и В – случайные события, событие D – достоверное событие, событие С – невозможное событие.

События, которые нельзя разбить на более простые, называют ***элементарными событиями (исходами, случаями).***
Пример: Событие «выпало четное число очков» при бросании игральной кости состоит из трех элементарных событий: «выпало два очка», «выпало четыре очка», «выпало шесть очков».

Элементарные события, при которых наступает событие *А*, называют ***элементарными событиями, благоприятствующими (благоприятными) событию А.***
Пример: Событию «сумма очков на обеих костях равна 7» при двойном бросании игральной кости благоприятствуют только шесть элементарных событий (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1).

Элементарные события, шансы наступления которых одинаковы, называют ***равновозможными событиями***.

Пример: Опыт: бросание правильной игральной кости. В этом опыте шесть элементарных событий, и все они равновозможны.

Формула классической вероятности

Вероятность – есть число, характеризующее *возможность* наступления события.

Вероятностью Р события А называют отношение числа m исходов, благоприятных этому событию, к общему числу n исходов

Пример: В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.

Решение. Обозначим через A событие «школьнику достанется вопрос по ботанике». Общее количество исходов $n=55$, количество благоприятствующих исходов $m=11$. Искомая вероятность

Геометрическая вероятность

Вероятность события А есть отношение меры *A* (длины, площади, объема и т.д.) к мере *U* пространства элементарных событий (множество всех элементарных событий).

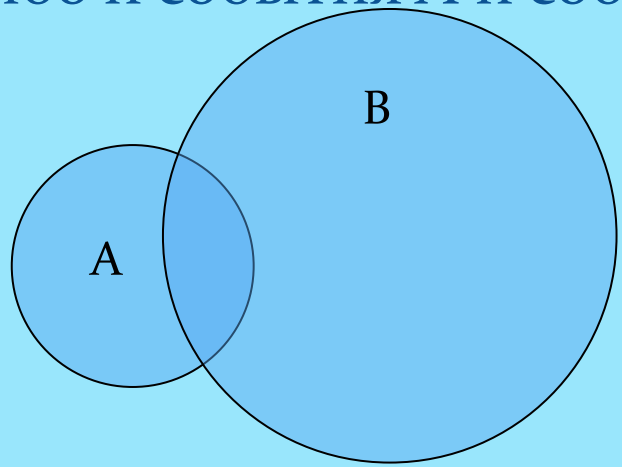
Пример: В круг радиуса *R* наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри данного вписанного правильного треугольника.

Решение. Искомая вероятность равна отношению площади треугольника к площади круга:

$$\frac{(R\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} : \pi R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}4137$$

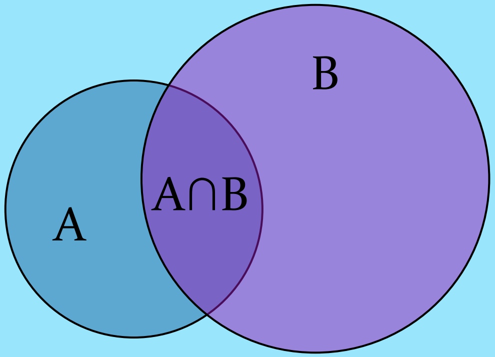
Операции над событиями

Суммой (объединением) событий A и B называют событие (обозначение $A+B$ или $A \cup B$), состоящее в появлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.



Пример: Если событие A – попадание в цель при первом выстреле, событие B – попадание в цель при втором выстреле, то событие $C = A+B$ есть попадание в цель вообще (или только при первом выстреле, или только при втором выстреле, или при первом и втором выстрелах).

Произведением (пересечением) двух событий A и B называют событие (обозначение AB или $A \cap B$), состоящее в совместном выполнении события A и события B.



Пример: Если событие A – попадание в цель при первом выстреле, событие B – попадание в цель при втором выстреле, то событие $C= AB$ есть попадание в цель при обоих выстрелах (и при первом выстреле и при втором выстреле).

Вероятностная линия в заданиях ЕГЭ
Задачи на определение классической вероятности

Задача 1. Вася, Петя, Коля и Леша бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

Решение. Событие A – «игру должен начинать Петя».

$n=4$

$m=1$

$P(A)=\frac{1}{4}=0{,}25$

Ответ: 0,25.

Задача 2. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 46 теннисистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Ярослав Исаков. Найдите вероятность того, что в первом туре Ярослав Исаков будет играть с каким-либо теннисистом из России?

Решение. Событие *A* – «в первом туре Ярослав Исаков будет играть с каким-либо теннисистом из России».

n=46-1=45 (т.к. Ярослав Исаков уже входит в эти 46 участников)

m=19-1=18 (т.к. Ярослав Исаков уже входит в эти 19 участников)

$P(A) = \frac{18}{45} = 0,4$

Ответ: 0,4.

Задача 3. На фабрике керамической посуды 10% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов.

Решение. Событие *А* – «случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов».

Обозначим за x количество произведенных на фабрике тарелок, тогда $0{,}1x$ тарелок имеют дефект и $0{,}9x$ тарелок не имеют дефекта. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок, т. е. $0{,}1x*0{,}8=0{,}08x$ тарелок, остальные $0{,}1x - 0{,}08x=0{,}02x$ дефектных тарелок поступают в продажу. Всего на продажу поступят $0{,}9x+0{,}02x=0{,}92x$ тарелок.

$n=0{,}92x$

$m=0{,}9x$

$P(A)=\dfrac{0{,}9x}{0{,}92x}\approx 0{,}98$

Ответ: 0,98

Решение задач на сложение и умножение вероятностей

Задача 1. Вероятность того, что новый мобильный телефон прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что телефон прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Обозначим событие A – «телефон прослужит больше года», событие B – «телефон прослужит больше двух лет», событие C – «телефон прослужит меньше двух лет, но больше года».

События B и C несовместные, их суммой является событие A.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C) \Rightarrow P(C)=P(A)-P(B)=0{,}96-0{,}87=0{,}09$.

Ответ: 0,09.

Задача 7. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение. Обозначим через *А* событие «яйцо окажется из первого хозяйства».

Обозначим за 1 все купленные яйца, за x – количество яиц, купленных в первом домашнем хозяйстве, тогда $(1-x)$ – количество яиц, купленных во втором домашнем хозяйстве. $0,4x$ яиц первого домашнего хозяйства имеют высшую категорию, $0,2(1-x)$ яиц второго хозяйства имеют высшую категорию, всего $0,4x+0,2(1-x)$ яиц имею высшую категорию. Из условия задачи, высшую категорию имеют $0,35*1$ яиц. Тогда $0,4x+0,2(1-x)= 0,35$. Решая уравнение, находим $x=0,75$ – количество яиц, купленных в первом домашнем хозяйстве.

$$P(A)=\frac{0,75}{1}=0,75$$

Ответ: 0,75.