



# *Понятие предела функции в точке*

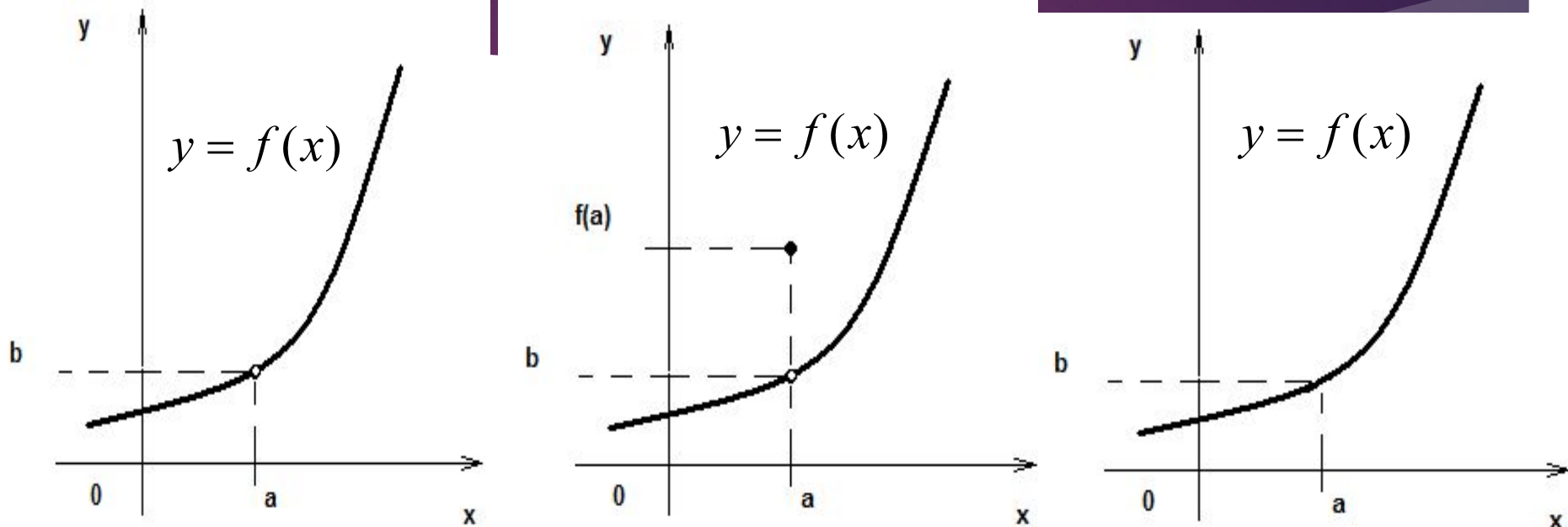
# Предел функции

*Предел* – одно из основных понятий

*математического анализа.* Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.

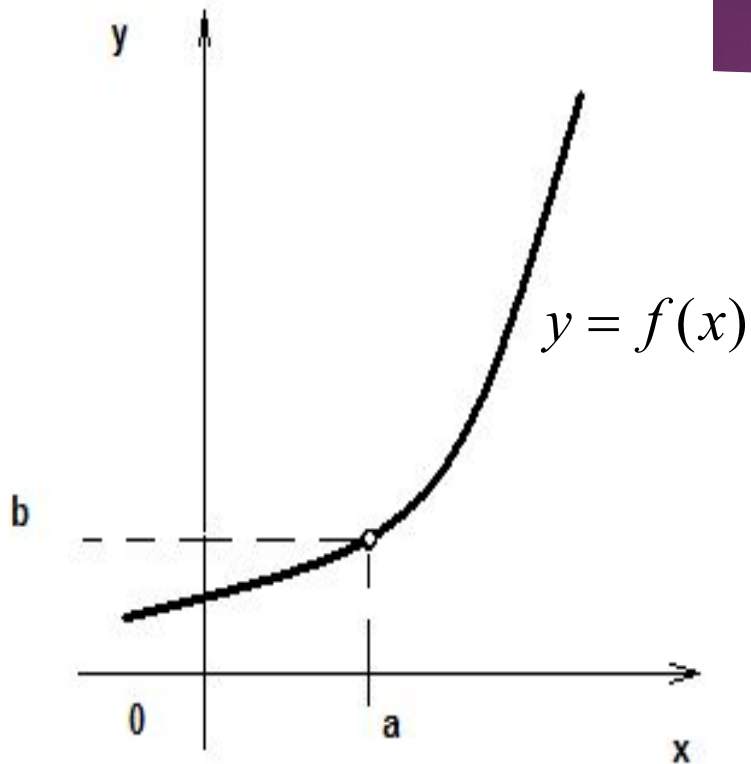
**РАЗЛИЧАЮТ** – предел функции в точке  **$x_0$**   
предел функции на бесконечности.

# Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

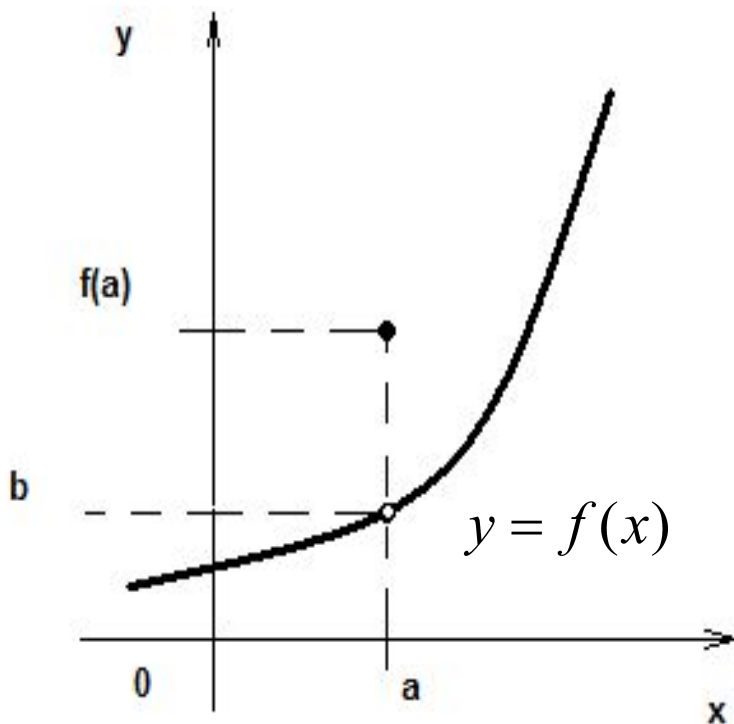


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке  $x = a$ .

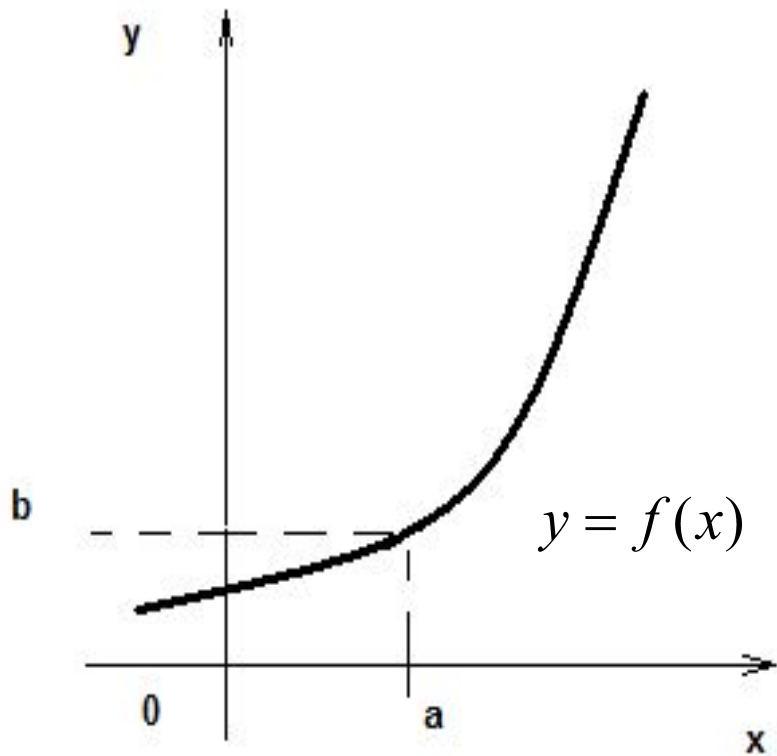
Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:



Для функции  $y = f(x)$ ,  
график которой изображен на  
этом рисунке, значение  $f(a)$   
не существует, функция  
в указанной точке не  
определена.



Для функции  $y = f(x)$   
график которой изображен на  
этом рисунке, значение  $f(a)$   
существует, но оно  
отличное от, казалось бы,  
естественного значения  $b$ ,  
точка  $(a, b)$  как бы  
выколота.



Для функции  $y = f(x)$ ,  
график которой изображен на  
этом рисунке, значение  $f(a)$   
существует и оно вполне  
естественное.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к  $a$  равен  $b$ ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению  $x = a$ , то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения  $b$ .

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки  $a$  справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx b$$

При этом сама точка  $x = a$  исключается из рассмотрения.

Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции

$y = f(x)$  при стремлении  $x$  к  $a$  равен значению функции в точке  $x = a$ , то в таком случае функцию называют **непрерывной**.

График такой функции представляет собой сплошную линию, **без «проколов» и «скачков»**.



Функцию  $y = f(x)$  называют **непрерывной** на промежутке  $X$ , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

**Примерами** непрерывных функций на всей числовой прямой являются:  $y = C$ ,  $y = kx + b$ ,  $y = ax^2 + by + c$ ,  
 $y = |x|$ ,  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  
Функция  $y = \sqrt{x}$  непрерывна на луче  $[0, +\infty)$ , а  
функция  $y = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  непрерывна на промежутках  
 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

## Предел функции в точке

Число **B** называется пределом функции в точке **a**, если для всех значений **x**, достаточно близких к **a** и отличных от **a**, значение функции  $f(x)$  сколь угодно мало отличается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

**B.**

Теорема.

Если функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $x_0$ , то этот предел **единственный**.

# Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция.

- ▶ Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  (здесь  $a$  – конечное число или  $\infty$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

- ▶ Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой функцией (или бесконечно большой величиной) при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

# Графическая иллюстрация

$$x \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

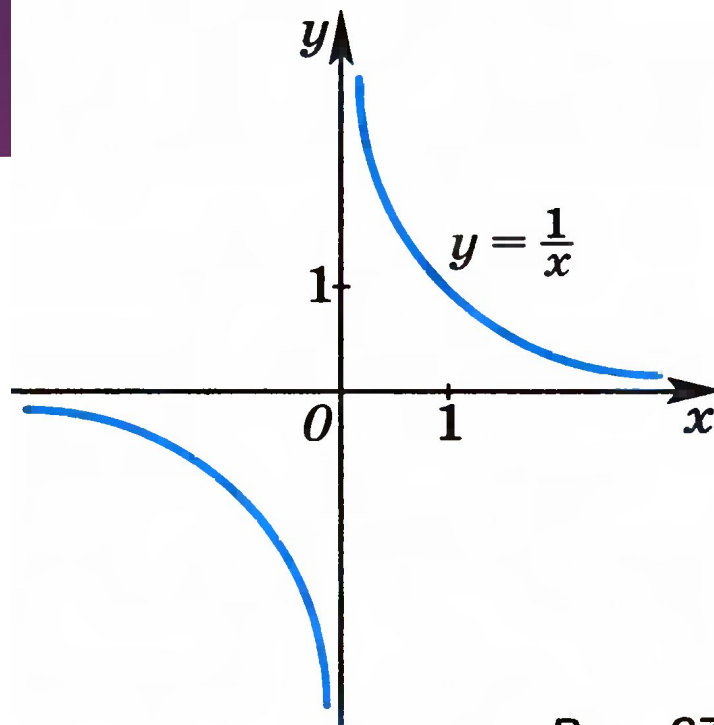


Рис. 37

**Таким образом, величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, и наоборот.**

# ТЕОРЕМА 1.

Предел **СУММЫ** (разности) 2-х функций равен **СУММЕ** (разности) их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

## ТЕОРЕМА 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$$

# ТЕОРЕМА 3.

Предел ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2-х функций равен ПРОИЗВЕДЕНИЮ их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$



## ТЕОРЕМА 4.

Предел ОТНОШЕНИЯ 2-х функций равен ОТНОШЕНИЮ их пределов, если последние существуют и ПРЕДЕЛ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОТЛИЧЕН ОТ 0:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

## ТЕОРЕМА 5.

Постоянный множитель  
можно выносить за знак  
предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

# ТЕОРЕМА 6.

Предел степени переменного равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x \rightarrow a} (z^n) = (\lim_{x \rightarrow a} z)^n$$



Вычисление  
предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения  $x_0$  в функцию  $f(x)$ .

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения  $x_0$  в функцию  $f(x)$  получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:

# Вычислить

## пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 4 = -8;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 7x + 6}{(x+2)^2} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)(x+\frac{3}{2})}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+3}{x+2} = \infty;$$

# Примеры

**Пример 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

**Пример 4.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1,5.$$

# Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения  $x_0$  в функцию  $f(x)$  получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются *неопределенности*, а вычисление пределов в этом случае называется *раскрытие неопределенности*.

# Методы вычисления пределов на неопределенность

$$\frac{0}{0}, \frac{c}{0}, \frac{c}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \frac{0 - 0}{0 - 0} = \left( \frac{0}{0} \right) -$$

Раскрыть соответствующую неопределенность - это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, что, однако не всегда просто



# Правило № 1

- ▶ В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

## Пример №1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \left( \frac{0}{0} \right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x - 2)}{x(2x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2}{2x - 5} = \frac{2}{5}$$

## Пример № 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x^2 + 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x}{\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2x)} = \frac{4 * 0}{3 * 0 + 2 * 0} = \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x + 2} = \frac{4}{3 * 0 + 2} = 2.$$

# Правило № 2



- ▶ Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

# Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности

$$\frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = \textcircled{-9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1) \cdot (\sqrt{x+1} + 1)}{x \cdot (\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x+1} - 1}{x \cdot (\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Если  $f(x)$  - иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

# Упражнения:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 3x^2}{2x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - x}{3 - \sqrt{x + 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{1 + 2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 5x - 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(7x + 2)(4x - 3)(5x + 1)]$$

# Домашнее задание:

188.1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4);$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + x^2 + 8x + 10);$

5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2};$

2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 1);$

4)  $\lim_{x \rightarrow 2} ((x^2 - 1)(x - 3)(x - 5));$

6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$

189.1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6};$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2};$

5)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9};$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x^2 + 2x};$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x};$

6)  $\lim_{x \rightarrow (-3/2)} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3};$