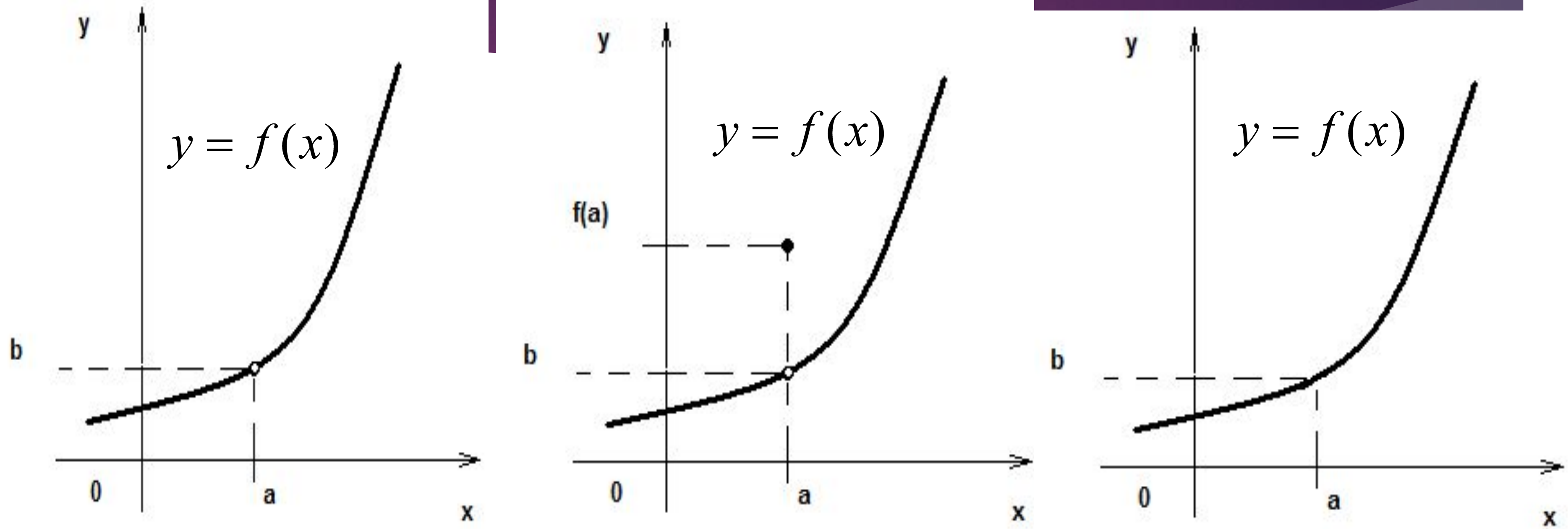
Понятие предела функции в точке

Предел функции

Предел – одно из основных понятий математического анализа. Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.

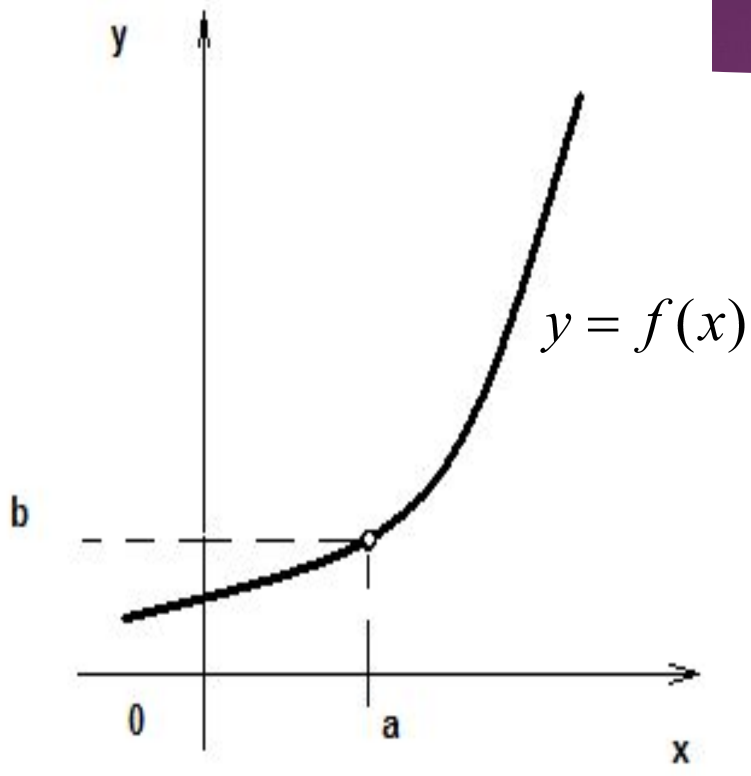
РАЗЛИЧАЮТ – предел функции в точке И предел функции на бесконечности.

Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

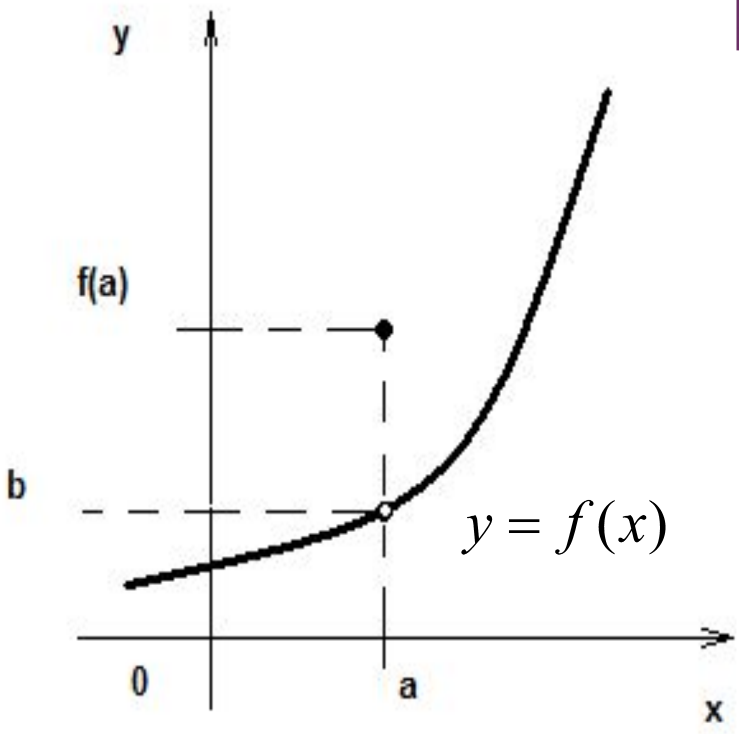


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x=a$.

Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:

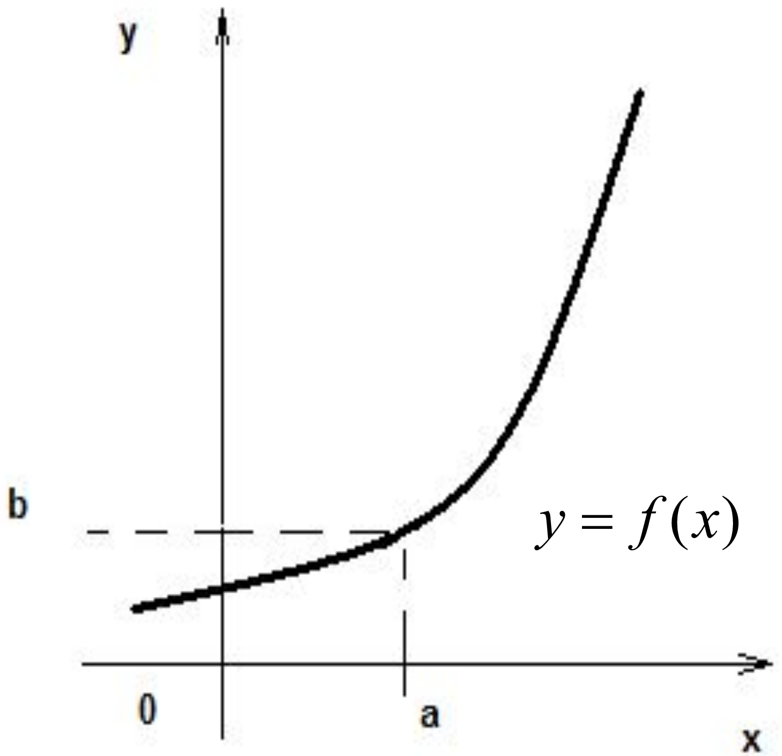


Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена.



Для функции $y = f(x)$ **график которой изображен на этом рисунке, значение** $f(a)$ **существует, но оно отличное от, казалось бы, естественного значения** $b,$

точка $(a,\ b)$ как бы **выколота.**



Для функции $y = f(x)$,

график которой изображен на

этом рисунке, значение $f(a)$

существует и оно вполне

естественное.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b».

Содержательный смысл этой фразы следующий: *если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b.*

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx a$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.

Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$, то в таком случае функцию называют ***непрерывной***.

График такой функции представляет собой сплошную линию, ***без «проколов»*** и ***«скачков»***.

Функцию $y = f(x)$ *называют* **непрерывной на промежутке** X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Примерами непрерывных функций на всей числовой прямой являются: $y = C, \ \ y = kx + b, \ \ y = ax^2 + by + c,$

$y = |x|, \ \ y = x^n, \ \ n \in \mathrm{N},$

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0, \ +\infty),$ а функция $y = x^{-n}, \ \ n \in \mathrm{N}$ непрерывна на промежутках

$$(-\infty, \ 0) \cup (0, \ +\infty).$$

Предел функции в точке

Число **В** называется пределом функции в точке **а**, если для всех значений **х**, достаточно близких к **а** и отличных от **а**, значение функции $f(x)$ сколько угодно мало отличается от **В**.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Теорема.

Если функция *f* (x) имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.

Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция.

- Функция α (x) называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$ (здесь a – конечное число или ∞), если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

- Функция f(x) называется ***бесконечно большой*** функцией (или бесконечно большой величиной) при x→a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Графическая иллюстрация

$x \to 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x} \to \infty$

$x \to \infty$ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{1}{x} \to 0$

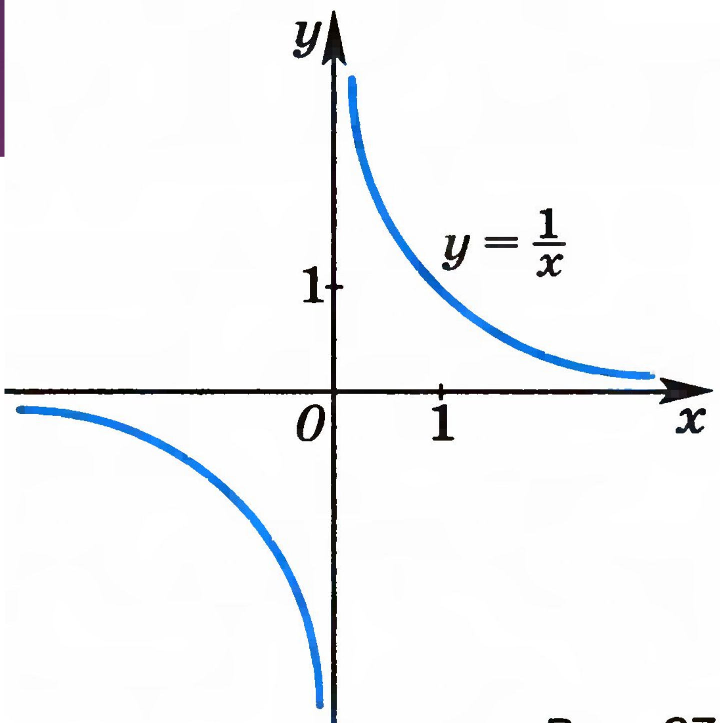


Рис. 37

Таким образом, величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, и наоборот.

ТЕОРЕМА 1.

Предел СУММЫ (разности) 2-х функций равен СУММЕ (разности) их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

ТЕОРЕМА 3.

Предел ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2-х функций равен ПРОИЗВЕДЕНИЮ их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 4.

Предел ОТНОШЕНИЯ 2-х функций равен ОТНОШЕНИЮ их пределов, если последние существуют и ПРЕДЕЛ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОТЛИЧЕН ОТ 0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \textit{если}\_\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Теорема 5.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

ТЕОРЕМА 6.

Предел степени переменного равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x\to a}(z^n) = (\lim_{x\to a} z)^n$$

Вычисление предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8;$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=2;$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}\overset{(0/0)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x+\frac{3}{2})}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}=\infty;$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

$$\lim_{x \to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1,5.$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности,*** а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

Методы вычисления пределов на неопределенность

$$\frac{0}{0}, \frac{c}{0}, \frac{c}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\frac{0-0}{0-0}=\left(\frac{0}{0}\right)-$$

Раскрыть соответствующую неопределенность - это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, что, однако не всегда просто

Правило № 1

- В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, достаточно

числитель и знаменатель дроби разделить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Пример №1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{2}{5}$$

Пример № 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x^2+2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+2x\right)}=\frac{4*0}{3*0+2*0}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(3x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3x+2}=\frac{4}{3*0+2}=2.$$

Правило № 2

- Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\ldots\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\ldots}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\ldots$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Упражнения:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+5x-12}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^2-3x+4\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left[(7x+2)(4x-3)(5x+1)\right]$$

Домашнее задание:

188. 1) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 3x + 4)$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x^2 + 1)$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} (3x^3 + x^2 + 8x + 10)$; 4) $\lim\limits_{x \to 2} ((x^2 - 1)(x - 3)(x - 5))$;

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2}$; 6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

189. 1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{2x - 6}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{3x^2 + 2x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 + x}{x}$;

5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$; 6) $\lim\limits_{x \to (-3/2)} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$;